МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для реализации программы дисциплины
ЕН.02 ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

для специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование
Базовая подготовка

2024

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Комплект практических работ учебной дисциплины ЕН.02 «Элементы математической логики» предназначен для реализации государственных требований в соответствии с ФГОС по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Практические работы базируются на знаниях, которые студенты получают при изучении дисциплины ЕН.02 «Элементы математической логики» и направлены на закрепление и углубление теоретического материала.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

уметь:

- формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения;

знать:

- основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;
- формулы алгебры высказываний;
- методы минимизации алгебраических преобразований;
- основы языка и алгебры предикатов

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
(общее время на выполнение – 20 ч.)

Составлен в соответствии с рабочей программой по данной дисциплине.

Практическая работа№ 1 Операции над множествами. Классификация множеств. Мощность множеств
Практическая работа№ 2 Круги Эйлера решение задач
Практическая работа№ 3 Определение значения истинности высказываний. Построение составных высказываний
Практическая работа№ 4 Составление таблиц истинности для формул
Практическая работа№ 5 Приведение формул к совершенным нормальным формам
Практическая работа№ 6 Упрощение формул логики до минимальной ДНФ
Практическая работа№ 7 Алгебра Буля. Решение задач
Практическая работа№ 8 Логические операции над предикатами
Практическая работа№ 9 Применение логики предикатов
Практическая работа№ 10 Составление алгоритмов. Различные подходы к формализации понятия алгоритма

Требования к оформлению практических работ

После изучения соответствующей темы студенты выполняют практическую работу. Содержание практических работ полностью соответствует рабочей программе по математике.

К выполнению практической работы можно приступать только после изучения соответствующей темы и получения навыков решения задач. Предусмотренные задания носят репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер. Все задачи и расчеты обязательно должны быть доведены до окончательного числового результата.

Все практические работы, сдаваемые учащимися на проверку, должны быть выполнены в обычной тетради в клетку. При выполнении практической работы студентам рекомендуется:

– использовать учебные пособия, справочники;

– проводить несложные дедуктивные рассуждения;
– обосновывать шаги решения задач;
– формулировать определения математических понятий;
– пользоваться математической терминологией и символикой;
– письменно оформлять решения задач;
– пользоваться калькулятором;
– самостоятельно изучать учебный материал.

Все представленные варианты практических работ даны одинаковой степени трудности.

Практическая работа выполняется в сроки, установленные в соответствии с календарно-тематическим планом. За каждую практическую работу студент должен получить положительную оценку.

Практическая работа№ 1

Тема: Операции над множествами. Классификация множеств. Мощность множеств.

Цель:научить выполнять операции над множествами и вычислять их мощность.

Материальное обеспечение:Практическая работа.

Общие теоретические положения

Основные понятия множества

Определение 1.*Множеством* называется совокупность каких-либо объектов, обладающим общим для всех характеристическим свойством. Это определение нельзя считать строгим, так как понятие множества является исходным понятием математики и не может быть определено через другие математические объекты. Один из основателей теории множеств Г. Кантор определял множество так: "Множество есть многое, мыслимое как целое".

Пример 1.

Следующие совокупности объектов являются множествами: множество деревьев в лесу, множество целых чисел, множество корней уравнения $e^x sinx = 0.5$.

Всякое множество состоит из *элементов*. Множества обозначают большими буквами, например,A. B, C, а элементы – маленькими буквами, например, a, b, c.

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов.

Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Нужно различать элемент a и множество, состоящее из единственного элемента a.

Пример 2.

Множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2; но множество $\{A\}$ состоит из одного элемента A.

Если элемент a принадлежит множеству A, это записывается следующим образом:

$a \in A$. Если элемент a непринадлежит множеству A, то записывают так: $a \notin A$.

Пример 3.

Пусть A_1 – множество простых чисел, A_2 – множество целых чисел, $a = 4$. Тогда

$a \in A_2$, $a \notin A_1$.

Если все элементы множества A являются элементами множества B и наоборот, т. е. множества A и B *совпадают*, то говорят, что $A = B$.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, говорят, что множество A является *подмножеством* множества B,и записывают $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$. Отметим, что по определению само множество A является своим подмножеством, т.е. $A \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то по ранее введенному определению $A = B$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A есть *собственное подмножество*B, $A \subset B$. Если A не является собственным подмножеством B, то записывают $A \not\subset B$.

Пример 4.

Пусть A – множество четных чисел, B – множество целых чисел, C –множество нечетных чисел. Тогда

$A \subset B$, $C \subset B$, $A \not\subset C$, $B \not\subset A$.

Не надо смешивать *отношение принадлежности* ($\in$) и *отношение включения* ($\subseteq$).

Пример 5.

Пусть $A = \{2\}$ – множество, состоящее из одного элемента, $B = \{\{2\}, \{4\}\}$ – множество, состоящее из двух элементов, каждое из которых является одноэлементным множеством. Тогда имеют место следующие соотношения:

$2 \in \{2\}$;

$\{2\} \subset \{\{2\}, \{4\}\}$;

$2 \notin \{\{2\}, \{4\}\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества, $\varnothing \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Пример 6.

Множество корней уравнения $sinx = 2$ является пустым.

Множество всех подмножеств данного множества A называется множеством-степенью и обозначается $P(A)$. Множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов (доказать самостоятельно).

Пример 7.

Пусть множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2. Тогда множество $P(A)$ включает в себя пустое множество $\varnothing$, два одноэлементных множества $\{1\}$ и $\{2\}$ и само множество $A = \{1, 2\}$, т. е.

$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Мы видим, что множество $P(A)$ состоит из четырех элементов ($4 = 2^2$).

Существуют следующие способы задания множеств.

1. Перечислением элементов множества. Например,

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ – конечное множество;

$B = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – бесконечное множество.

2. Указанием свойств элементов множества. Для этого способа пользуются следующим форматом записи: $A = \{a|$ указание свойства элементов$\}$. Здесь a является элементом множества A, $a \in A$.Например,

$A = \{a \mid a$ – простое число$\}$ – множество простых чисел;

$B = \{b \mid b^2 - 1 = 0$, b – действительное число$\}$ – множество, состоящее из двух элементов, $B = \{-1, 1\}$;

$Z = \{x \mid \frac{\sin x}{x} = 1\}$– множество, состоящее из одного числа, $x = 0$.

Операции над множествами

Рассмотрим основные операции над множествами.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B:

$A \cup B = \{x| \ x \in A$ или $x \in B\}$.

Из определения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$.

Аналогично определяется объединение нескольких множеств

Пример 8.

а) Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Тогда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

б) Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3:

$A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Тогда $A \cup B$ множество чисел, которые делятся на 2 или на 3:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, все элементы которого являются элементами обоих множеств A и B:

$A \cap B = \{x| \ x \in A$ и $x \in B\}$.

Из определения следует, что $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ и $A \cap B \subseteq A \cup B$.

Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.

Пример 9.

Рассмотрим данные из примера 1.8. а) Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Тогда $A \cap B = \{4, 6\}$.

б) Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3:

$A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Тогда $A \cap B$ множество чисел, которые делятся и на 2 и на 3:

$A \cup B = \{6, 12, 18, \ldots\}$.

Может оказаться, что множества не имеют ни одного общего элемента. Тогда говорят, что множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество.

Пример 10.

Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$.

Тогда $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Относительным дополнением множества B до множества A называется множество $A \setminus B$, все элементы которого являются элементами множестваA, но не являются элементами множестваB:

$A \setminus B = \{x | \; x \in A$ и $x \notin B\}$.

Пример 11.

Рассмотрим данные из примера 1.8.

а) $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

$A \setminus B = \{4, 5\}$, $B \setminus A = \{2\}$.

б) $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Тогда $A \setminus B$ –множество чисел, которые делятся на 2, но не делятся на 3, а В $\setminus A$ – множество чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 2:

$A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$.

$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A + B$:

$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пример 12.

Рассмотрим данные из примера 1.11.

а) $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

$A \setminus B = \{4, 5\}$, $B \setminus A = \{2\}$, $A + B = \{2, 4, 5\}$.

б) $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}$.

$B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \ldots\}$, $A + B = \{2, 3, 4, 8, 9, \ldots\}$.

Универсальным множеством называется такое множество U, что все рассматриваемые в данной задаче множества являются его подмножествами.

Абсолютным дополнением множества A называется множество $\overline{A}$ всех таких элементов $x \in U$, которые не принадлежат множеству A: $\overline{A} = U \setminus A$.

Пример 1.13.

Пусть A – множество положительных четных чисел.

Тогда U – множество всех натуральных чисел и $\overline{A}$ - множество положительных нечетных чисел.

Счетные множества

Определение 1. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, называется *счетным*.

Можно сказать также, что множество счетно, если его элементы можно перенумеровать.

Пример .

Следующие множества являются счетными.:

1. $A_1 = \{-1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$;
2. $A_2 = \{2, \; 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\}$;
3. $A_3 = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$;
4. $A_4 = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$;

Чтобы установить счетность некоторого множества, достаточно указать взаимно однозначное соответствие между элементами данного множества и множества натуральных чисел. Для примера 1.19 взаимно однозначное соответствие устанавливается по следующим правилам: для множества A_1: $-n \leftrightarrow n$; для множества A_2: $2^n \leftrightarrow n$; для множества A_3: $2n \leftrightarrow n$; счетность множества A_4 установлена в примере 1.19;

Установить счетность множеств можно также, используя следующие *теоремы о счетных множествах* (приводятся без доказательств).

Теорема 1. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Пример .

Множество $A = \{3, 6, \ldots, 3n, \ldots\}$ счетно, т.к. A – бесконечное подмножество множества натуральных чисел, $A \subset N$.

Теорема 2. Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств счетно.

Пример.

Множество $A = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ неотрицательных целых чисел счетно, множество $B = \{0, -1, \ldots, -n, \ldots\}$ неположительных целых чисел тоже счетно, поэтому множество всех целых чисел $C = A \cup B = \{\ldots, -n, \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ тоже счетно.

Теорема 3. Множество всех рациональных чисел, т.е. чисел вида $\frac{p}{q}$, где p и qцелые числа, счетно.

Теорема 4. Если $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ – счетные множества, то множество всех пар $C = \{(a_k, b_n), k = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots\}$ счетно.

Пример.

Геометрический смысл пары (a_k, b_n) – точка на плоскости с рациональными координатами (a_k, b_n). Поэтому можно утверждать, что множество всех точек плоскости с рациональными координатами счетно.

Теорема 5. Множество всех многочленов $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ любых степеней с рациональными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$счетно.

Теорема 6. Множество всех корней многочленов любых степеней с рациональными коэффициентами счетно.

Множества мощности континуума

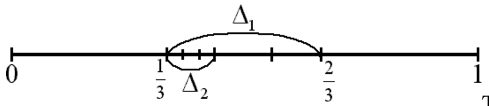
Существуют бесконечные множества, элементы которых нельзя перенумеровать. Такие множества называются *несчетными*.

Теорема Кантора. Множество всех точек отрезка [0, 1] несчетно.

Доказательство.

Пусть множество точек отрезка [0, 1] счетно. Значит, эти точки можно перенумеровать, т. е. расположить в виде последовательности $x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$.

Рис. 1.7



Разобьем отрезок [0, 1] на три равные части. Где бы ни находилась точка x_1, она не может принадлежать всем отрезкам $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Поэтому среди них есть отрезок Δ_1, не содержащий точку x_1 (рис. 1.7). Возьмем этот отрезок Δ_1 и разделим его на три равные части. Среди них всегда есть отрезок Δ_2, не содержащий точку x_2. Разделим этот отрезок на три равные части и т. д. Получим последовательность отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$. В силу аксиомы Кантора сходится к некоторой точке x при $n \to \infty$. По построению эта точка x принадлежит каждому отрезку $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n, \ldots$, т. е. она не может совпадать ни с одной из точек $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$, т. е. последовательность $x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$не исчерпывает всех точек отрезка [0, 1], что противоречит первоначальному предположению. Теорема доказана.

Множество, эквивалентное множеству всех точек отрезка [0, 1] называется *множеством мощности континуума*.

Так как множества точек интервалов, отрезков и всей прямой эквивалентны между собой, то все они имеют мощность континуума.

Чтобы доказать, что данное множество имеет мощность континуума, достаточно указать взаимно однозначное соответствие между данным множеством и множеством точек отрезка, интервала или всей прямой.

Пример.

Из рисунок 1 следует, что множество точек параболы $y = x^2$ эквивалентно множеству точек прямой $-\infty < x < \infty$ и, следовательно, имеет мощность континуума.

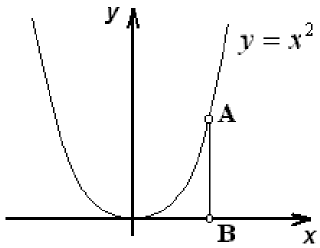


Рисунок 1

Установить мощность континуума можно также, используя следующие *теоремы о множествах мощности континуума* (приводятся без доказательств).

Теорема 1. Множество всех подмножеств счетного множества счетно.

Теорема 2. Множество иррациональных чисел имеет мощность континуума.

Теорема 3. Множество всех точек n-мерного пространства при любом n имеет мощность континуума.

Теорема 4. Множество всех комплексных чисел имеет мощность континуума.

Теорема 5. Множество всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ имеет мощность континуума.

Итак, мощности бесконечных множеств могут различаться. Мощность континуума больше, чем мощность счетного множества. Ответ на вопрос, существуют ли множества более высокой мощности, чем мощность континуума, дает следующая теорема (приводится без доказательства).

Теорема о множествах высшей мощности. Множество всех подмножеств данного множества имеет более высокую мощность, чем данное множество.

Из этой теоремы следует, что множеств с максимально большой мощностью не существует.

Задание к работе:

Вариант № 1

1. Фирма имеет 100 предприятий, причем каждое предприятие выпускает хотя бы одну продукцию вида А, В, С. Продукцию всех трех видов выпускают 10 предприятий, продукцию А и В – 18 предприятий, продукцию А и С – 15 предприятий, продукцию В и С – 21 предприятие. Число предприятий, выпускающих продукцию А равно числу предприятий, выпускающих продукцию В и равно числу предприятий, выпускающих продукцию С. Найти число всех предприятий.

2. Упростить: $\overline{(A \cup B)} \cup \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. Является ли множество $A = \{1, 2, 3\}$ подмножеством множества $B = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$?

4. Придумать пример множеств A, B, C, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{x: x^2 - 8x + 15 = 0\}$ и $B = \{2, 3\}$?

Вариант № 2

1. В группе спортсменов 30 человек. Из них 20 занимаются плаванием, 18 – легкой атлетикой и 10 – лыжами. Плаванием и легкой атлетикой занимаются 11 человек, плаванием и лыжами – 8,

легкой атлетикой и лыжами – 6 человек. Сколько спортсменов занимаются всеми тремя видами спорта?
2. Упростить: $A \cap (A \cup B)$.
3. В каком случае $A \subseteq A \cap B$?
4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.
5. Какое из множеств $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ и $B = \{1, 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \ldots\}$ имеет большую мощность?

Вариант № 3

1. В студенческой группе 20 человек. Из них 10 имеют оценку “отлично” по английскому языку, 8 - по математике, 7 - по физике, 4 - по английскому языку и по математике, 5 - по английскому языку и по физике, 4 - по математике и по физике, 3 - по английскому языку, по математике и по физике. Сколько студентов группе не имеют отличных оценок?
2. Упростить: $(A \backslash B) \cup (A \backslash B)$.
3. Найти все подмножества множества A= {1, 2, 3, 4).
4. Пусть $A_n = \{0, \ 1/2^n\}$. Найти $\bigcup_{n=1}^{4} A_n$.
5. Доказать, что множества точек контуров всех треугольников эквивалентны.

Вариант № 4

1. В классе 20 человек. На экзаменах по истории, математике и литературе 10 учеников не получили ни одной пятерки, 6 учеников получили 5 по истории, 5 – по математике и 4 – по литературе; 2 - по истории и математике, 2 - по истории и литературе, 1 - по математике и литературе. Сколько учеников получили 5 по всем предметам?
2. Упростить: $(A \cap B) \cup (A \cap B)$.
3. Является ли множество $A = \{1, 2, 3\}$ подмножеством множества $B = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$?
4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{2^x, 0 < x < \infty\}$ и $B = \{2^n, n = 1, 2, \ldots\}$?

Вариант № 5

1. В спортивном лагере 100 человек, занимающихся плаванием, легкой атлетикой и лыжами. Из них 10 занимаются и плаванием, и легкой атлетикой, и лыжами, 18 – плаванием и легкой атлетикой, 15 – плаванием и лыжами, 21 – легкой атлетикой и лыжами. Число спортсменов, занимающихся плаванием, равно числу спортсменов, занимающихся легкой атлетикой, и равно числу спортсменов, занимающихся лыжами. Найти это число.
2. Упростить: $(A \cup B) \cup (A \cup B)$.
3. Найти все подмножества множества $A = \{1, 2, 3, 4)$.
4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.
5. Доказать, что множества точек контуров всех треугольников эквивалентны.

Вариант № 6

1. Группе студентов предложено три спецкурса: по мультимедиа, искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 22 студента записались на спецкурс по мультимедиа, 18 – на спецкурс по искусственному интеллекту, 10 – на спецкурс по имитационному моделированию, 8 – на спецкурсы по мультимедиа и искусственному интеллекту, 15 – на спецкурсы по мультимедиа и имитационному моделированию, 7 – на спецкурсы по искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 5 студентов записались на все три спецкурса. Сколько студентов в группе?
2. Верно или неверно равенство: $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$?
3. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A \cup B = C$.

4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A\cup B = C$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{x: x^2\text{-}8x+15= 0\}$ и $B = \{2, 3\}$?

Вариант № 7

1. Во время сессии 24 студента группы должны сдать три зачета: по физике, математике и программированию. 20 студентов сдали зачет по физике, 10 – по математике, 5 – по программированию, 7 – по физике и математике, 3 – по физике и программированию, 2 – по математике и программированию. Сколько студентов сдали все три зачета?
2. Упростить: $(A\cup B) \cup (A\cap B)$.
3. Доказать, что множество точек $A= \{(x, y): y = |x|$, -, $– 1 \le x\le 1\}$ несчетно.
4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A\cup B = C$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{y: y = x^3, 1<x<2\}$ и $B = \{y: y = 3^x, 3<x<\infty\}$?

Вариант № 8

В группе переводчиков 15 человек владеет английским языком, 19 – французским, 8 – немецким. 9 переводчиков владеют английским и французским языком, 7 – английским и немецким, 6 – французским и немецким. 4 переводчика владеют всеми тремя языками. Сколько переводчиков в группе?
2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B\cup C) = (A \setminus B) \cup C$?
3. В каком случае $A \subseteq A\cap B$?
4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A\cup B = C$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{x: x^2 –3x + 2 = 0\}$ и $B = \{1, 3\}$?

Вариант № 9

1. Опрос группы студентов показал, что 70% из них любят ходить в кино, 60% в театр, 30% на концерты. В кино и театр ходят 40% студентов, в кино и на концерты – 20%, в театр и на концерты – 10%. Сколько студентов (в %) ходят в кино, театр и на концерты?
2. Верно или неверно равенство: $(A\cap B) \cap (A\cup B) = B$?
3. Привести пример двух множеств *A* и *B*, таких, что мощность множества *A* больше мощности множества *B*.
4. Придумать пример множеств *A, B, C*, каждое из которых имеет мощность континуума, так, чтобы выполнялось равенство: $A\cup B = C$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{x: x^3 – 1 = 0\}$ и $B = \{x: x^2 – 3x + 2 = 0\}$?

Вариант № 10

1. В группе 20 учеников. После медицинского осмотра на дополнительное обследование 14 учеников были направлены к терапевту, 6 – к окулисту, 5 – к ортопеду. К терапевту и окулисту были направлены 3 ученика, к терапевту и ортопеду –3, к окулисту и ортопеду – 2. Сколько учеников были направлены к терапевту, окулисту и ортопеду?
2. Упростить: $(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cup B)$.
3. Верно или неверно равенство: $(A\cap B) \cap (A\cup B) = B$?
4. Найти все подмножества множества $O= \{ c, d\}$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{(x, y): y = \ln x, 0 <x<\infty\}$ и $B = \{(x, y): y = \sin x, –\infty<x<\infty\}$?

Вариант № 11

1. При обследовании рынка спроса инспектор указал в опросном листе следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 покупают жевательную резинку "Дирол", 752 – "Орбит" , 418 – "Стиморол", 570 – "Дирол" и "Орбит", 356 – "Дирол" и "Стиморол", 348 – "Орбит" и "Стиморол", 297 – все виды жевательной резинки. Показать, что инспектор ошибся.
2. Упростить: $\overline{A} \cup(B \setminus (A\cup B))$.
3. Придумать пример множеств *A, B, C*, так, чтобы выполнялось равенство: $A\cup B = C$, причем *A* – конечное множество, *B* и *C* – счетные множества.

4. Найти все подмножества множества $A= \{a, b, c, d\}$.
5. Пусть A– множество целых чисел, а B – множество четных чисел. Какие из следующих отношений справедливы: а) $A=B$; б) $A\sim B$; в) $A\supset B$; г) $A\supseteq B$; д) $A\not\subset B$; е) $A\in B$.

Вариант № 12

1. Всем участникам автопробега не повезло. 12 из них увязли в песке – пришлось толкать машину, 8 понадобилась замена колеса, у шестерых перегрелся мотор, пятеро и толкали машину и меняли колесо, четверо толкали машину и остужали мотор, трое меняли колесо и остужали мотор. Одному пришлось испытать все виды неполадок. Сколько было участников?
2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B\cap C) = (A \setminus B) \cap C$?
3. Доказать, что множество точек $A= \{y: y = 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ счетно.
4. Найти все подмножества множества $A= \{m, n, h, d\}$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{(x, y): y = x^3, 1<x<2\}$ и $B = \{(x, y): y = 3^x, 3<x<\infty\}$?

Вариант № 13

1. Из 10 участников ансамбля шестеро умеют играть на гитаре, пятеро – на ударных инструментах, пятеро – на духовых. Двумя инструментами владеют: гитарой и ударными – трое, ударными и духовыми – двое, гитарой и духовыми – четверо. Один человек играет на всех трех инструментах. Остальные участники ансамбля только поют. Сколько певцов в ансамбле?
2. Верно или неверно равенство: $(\overline{A \cup B} \cap C) = \overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C$?
3. Записать решение системы неравенств

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-5 < 0 \end{cases}$$

в виде пересечения двух множеств.
4. Найти все подмножества множества $G= \{a, c, d\}$.
5. Доказать, что множества $A = \{(x, y): y = x^3, 1<x<2\}$ и $B = \{y: y = 3^x, 3<x<\infty\}$ эквивалентны.

Вариант № 14

1. В одной студенческой группе 10 человек могут работать на Дельфи, 10 – на Паскале, 6 – на Си. По два языка знают: 6 человек – Дельфи и Паскаль, 4 – Паскаль и Си, 3 – Дельфи и Си. Один человек знает все три языка. Сколько студентов в группе?
2. Верно или неверно соотношение: $A\cap \overline{B} \cap C\subset A \cup B$?
3. Придумать пример множеств A, B, C, так, чтобы выполнялось равенство: $A\cup B = C$, причем A, B, и C – счетные множества.
4. Найти все подмножества множества $P= \{a, d\}$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{y: y = 3^x, 0<x<\infty\}$ и $B = \{y: y = 3^n, n = 1, 2, \ldots\}$?

Вариант № 15

1. В день авиации на аэродроме всех желающих катали на самолете, планере, дельтаплане. На самолете прокатились 30 человек, на планере – 20, на дельтаплане – 15. И на самолете, и на планере каталось 10 человек, на самолете и дельтаплане – 12, На планере и дельтаплане – 5. Два человека прокатились и на самолете, и на планере, и на дельтаплане. Сколько было желающих прокатиться?
2. Верно или неверно равенство: $(A\cup B) \setminus A = B \setminus A$?
3. Привести пример двух множеств A и B, таких, что мощность множества A больше мощности множества B.
4. Найти все подмножества множества $H= \{ c, d\}$.
5. Доказать, что множества $A = \{y: y = \ln x, 0 <x<\infty\}$ и $B = \{y: y = \sin x, -\infty<x<\infty\}$ эквивалентны.

Вариант № 16

1. Все грибники вернулись домой с полными корзинами. У десятерых из них в корзинах были белые грибы, у восемнадцати – подберезовики, у двенадцати – лисички. Белые и подберезовики были в шести корзинах, белые и лисички – в четырех, Подберезовики и лисички – в пяти. Все три вида грибов были у двух грибников. Сколько было грибников?
2. Верно или неверно равенство: $(A\cup B) \setminus (A\cap B) = A\cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$?

3. Доказать, что множество точек $A= \{(x, y): y = |x|, -, -1 \leq x \leq 1\}$ несчетно.
4. Найти все подмножества множества $A= \{a, b, c, d\}$.
5. Пусть A– множество точек отрезка [0, 1], а B – множество всех точек числовой оси. Какие из следующих отношений справедливы: а) $A=B$; б) $A\sim B$; в) $A\supset B$; г) $A\supseteq B$; д) $A\not\subset B$; е) $A\in B$.

Вариант № 17

1. Все туристы взяли в поход консервы. Шесть человек взяли тушенку, пять – сгущенку, восемь – кашу (с мясом). У троих в рюкзаках была тушенка и сгущенка, у двоих – тушенка и каша, у троих – сгущенка и каша, и только в одном рюкзаке лежали все три вида консервов. Сколько было туристов?
2. Верно или неверно равенство: $\overline{(A \cup B)} \cap C = C \setminus (C\cap (A\cup B))$?
3. Пусть A – множество решений уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Записать это множество двумя различными способами.
4. Найти все подмножества множества А= $\{a, d\}$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{x:\ x^2 -3x + 2 = 0\}$ и $B = \{2, 3\}$?

Вариант № 18

1. Было опрошено 70 человек. В результате опроса выяснили, что 45 человек знают английский язык, 29 – немецкий и 9 – оба языка. Сколько человек из опрошенных не знает ни английского, ни немецкого языков?
2. Верно или неверно равенство: $(A\cup B) \setminus (A\cap B) = A\cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$?
3. Найти все подмножества множества F= $\{a,b,c,d,e,f\}$.
4. Пусть A – множество решений уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Записать это множество двумя различными способами.
5. Счетно ли множество $\{(x, y):\ y = 3^x, 0<x<\infty\}$?

Вариант № 19

1. В туристической группе 10 человек знают английский язык, 10 – итальянский, 6 – испанский. По два языка знают: 6 человек – английский и итальянский, 4 – английский и испанский, 3 – итальянский и испанский. Один человек знает все три языка. Сколько туристов в группе?
2. Упростить $\overline{(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{A \cap B})}$.
3. Привести пример двух множеств A и B, таких, что мощность множества A больше мощности множества B.
4. Найти все подмножества множества А= $\{x, y, r, f, d\}$.
5. Эквивалентны ли множества $A = \{ 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ и $B = \{n^2, n = 1, 2, \ldots\}$?

Вариант № 20

1. Предприятие объявило набор рабочих на должности токаря, слесаря и сварщика. В отдел кадров обратились 25 человек. Из них 10 человек владели профессией токаря, 15 – слесаря, 12 – сварщика. Профессией и токаря, и слесаря владели 6 человек, и токаря, и сварщика – 5 человек, и слесаря и сварщика – 3 человека. Сколько человек владеют всеми тремя профессиями?
2. Верно или неверно равенство: $C \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{\overline{A} \setminus (B \cup C)}$?
3. Привести примеры множеств A, B и C , для которых одновременно выполняются равенства $A \cup B\cup C = A$ и $A \cap B\cap C = C$.
4. Найти все подмножества множества $A= \{x, z\}$.
5. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между множеством рациональных чисел отрезка [0, 1] и множеством рациональных чисел из этого интервала? Ответ обосновать.

Вариант № 21

1. Оказалось, что в группе туристов 15 человек были раньше во Франции, 19 – в Италии, 8 – в Германии. 9 туристов были во Франции и в Италии, 7 – во Франции и в Германии, 6 – и в Италии, и в Германии. 4 туриста были во всех трех странах. Сколько туристов были хотя бы в одной из трех стран?
2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B\cap C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$?

3. Привести примеры множеств A и B, для которых равенство $\overline{A} \cup B = A$
а) выполняется; б) не выполняется.
4. Найти все подмножества множества $S = \{x, y, z, t, e\}$.
5. Найти мощность множества точек окружности с центром в точке (0, 0) и радиусом 1.

Вариант № 22

1. Группе студентов из 30 человек была предложена контрольная работа из трех задач. Первую задачу решили 15 студентов, вторую – 13, третью – 12. Первую и вторую задачи решили 7 человек, первую и третью – 6, вторую и третью – 5 человек. Все три задачи решили 2 студента. Сколько студентов из группы не решили ни одной задачи?
2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$?
3. Привести пример двух бесконечных множеств A и B, таких, что мощность множества A больше мощности множества B.
4. Найти все подмножества множества $D = \{y, z\}$.
5. Найти мощность множества точек гиперболы $y = \frac{1}{x-2}$ при $x \in (3, \infty)$.

Вариант № 23

1. Анализ историй болезней группы из 20 детей показало, что 10 детей болели ветрянкой, 6 – корью, 5 – свинкой. Ветрянкой и корью болели 3 ребенка, ветрянкой и свинкой – 3, корью и свинкой – 2. Всеми тремя болезнями болел один ребенок. Сколько детей не болели ни одной из перечисленных болезней?
2. Верно или неверно равенство: $(\overline{A \cup B} \cap C) = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C$?
3. Доказать, что множество точек $A = \{(x, y): y = |x+1|,\ -1 \le x \le 1\}$ несчетно.
4. Найти все подмножества множества $A = \{x, z\}$.
5. Пусть A– множество точек отрезка [1, 2], а B – множество точек интервала (0, 3). Какие из следующих отношений справедливы: а) $A=B$; б) $A \sim B$; в) $A \subset B$; г) $A \supseteq B$; д) $A \not\subset B$; е) $A \in B$.

Вариант № 24

1. В книжный киоск привезли для продажи 100 книг Пушкина, Лермонтова и Тургенева. Книги Пушкина купили 60 человек, книги Лермонтова – 50, книги Тургенева – 30 человек. Книги Пушкина и Лермонтова купили 40 человек, книги Пушкина и Тургенева – 20, книги Лермонтова и Тургенева – 10 человек. Пять человек купили книги всех трех писателей. Сколько человек не купили ни одной из перечисленных книг?
2. Верно или неверно равенство: $C \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$?
3. Привести примеры множеств A, B и C таких, что равенство $A \cup B \cup C = C$
а) справедливо; б) несправедливо.
4. Найти все подмножества множества В= $\{x, y, z, k\}$.
5. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между множеством натуральных чисел N и множеством действительных чисел отрезка [0, 1]? Ответ обосновать.

Вариант № 25

1. Группа научных работников состоит из 100 человек. Из них 70 человек владеют английским языком, 50 – немецким, 40 – французским, 30 – английским и немецким, 25 – английским и французским, 15 – французским и немецким. Хотя бы один язык знает каждый научный работник. Сколько человек владеют всеми тремя языками?
2. Упростить: $(A \setminus (A \cap B)) \cup B$.
3. Привести примеры множеств A, B и C так, чтобы $A \in B$, $B \subset C$.
4. Найти все подмножества множества $C = \{x, y\}$.
5. Можно ли утверждать, что множество всех положительных пятизначных чисел счетно? Ответ обосновать.

Вариант № 26

1. На курсы иностранных языков записалось 100 человек. Оказалось, что 70 человек будут изучать английский язык, 60 человек – французский и 30 человек - немецкий. Английский и французский собираются изучать 40 человек, английский и немецкий – 20, французский и немецкий – 10. Сколько студентов будут изучать все три языка?

2. Упростить равенство: $(A \cap C) \setminus (C \cap (A \cup B))$.

3. Привести пример двух различных бесконечных множеств A и B, таких, что мощность множества A равна мощности множества B.

4. В каком случае $A \cup B = A \cap B$?

5. Эквивалентны ли множества $A = \{x:\ x^3 - 1 = 0\}$ и $B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$?

Вариант № 27

В команде бегунов десять спортсменов бегают на длинные дистанции, восемнадцать – на средние, двенадцать – на короткие. На длинные и средние дистанции бегают пять спортсменов, на средние и короткие – шесть. На длинные и короткие дистанции не бегает никто. Сколько бегунов в команде?

2. Верно или неверно равенство: $\overline{(A \cap B)} \cup C) = \overline{A} \cup \overline{B} \cup C$?

3. В каком случае $A \cup B = A \cap B$?

4. Эквивалентны ли множества $A = \{x:\ x^3 - 1 = 0\}$ и $B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0\}$?

5. Можно ли утверждать, что множество всех положительных чисел имеет меньшую мощность, чем множество всех действительных чисел? Ответ обосновать.

Вариант № 28

1. В студенческой группе 25 человек. Чтобы получить допуск на экзамен по данному курсу необходимо защитить курсовую работу, выполнить лабораторную работу и сдать зачет. 15 студентов защитили курсовую работу, 20 выполнили лабораторную работу, 17 сдали зачет. Защитили курсовую работу и выполнили лабораторную работу 12 человек. Защитили курсовую работу и сдали зачет 13 человек. Выполнили лабораторную работу и сдали зачет 16 человек. Сколько студентов допущено к экзамену?

2. Упростить: $\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

3. Привести пример двух бесконечных множеств A и B, таких, что мощность множества A меньше мощности множества B.

4. Доказать, что множество точек $A = \{y: y = 2^n, \mathrm{n} = 1, 2, \ldots\}$ счетно.

5. Эквивалентны ли множество рациональных чисел отрезка [0, 1] и множество рациональных чисел из этого интервала? Ответ обосновать.

Вариант № 29

1. В классе 20 детей. Из них 10 дополнительно занимаются в музыкальной школе, 6 – теннисом, 5 – китайским языком. Музыкальную школу и занятия по теннису посещают три ребенка, музыкой и китайским языком занимаются трое, теннисом и китайским языком двое. Всеми тремя видами дополнительных занятий занимается один ребенок. Сколько детей не занимается ни одним из перечисленных занятий?

2. Пользуясь равносильными преобразованиями, установить, верно или неверно равенство: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$?

3. Доказать, что множество точек $A = \{y: y = 2^n, \mathrm{n} = 1, 2, \ldots\}$ счетно.

4. Привести примеры множеств A, B и C , для которых одновременно выполняются равенства $A \cup B \cup C = A$ и $A \cap B \cap C = C$.

5. Эквивалентны ли множества $A = \{(x, y): y = x^2, 1<x<2\}$ и $B = \{(x, y): y = 2^x, 3<x<\infty\}$?

Вариант № 30

1. В цеху имеется 25 станков, которые могут выполнять три вида операций: А, В и С. Из них 10 станков выполняют операцию А, 15 – В, 12 – С. Операции А и В могут быть выполнены на 6 станках, А и С – на 5, В и С – на 3 станках. Сколько станков могут выполнять все три операции?

2. Верно или неверно равенство: $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \setminus \overline{(B \cup C)}$?

3. Привести примеры множеств A, B и C , для которых одновременно выполняются равенства $A \cup B \cup C = A$ и $A \cap B \cap C = C$.
4. Доказать, что множество точек $A = \{y: y = 2^n, n = 1, 2, \ldots\}$ счетно.
5. Можно ли построить взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных чисел отрезка [0, 1] и множеством действительных чисел интервала (0, 1)? Ответ обосновать.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Пусть $a \in A$. Следует ли отсюда, что $\{a\} \subseteq A$?
2. В каком случае $A \subseteq A \cap B$?
3. Назовите множество, которое является подмножеством любого множества.
4. Может ли быть множество эквивалентно своему подмножеству?
5. Мощность какого множества больше: множества натуральных чисел или множества точек отрезка [0, 1]?

Практическая работа№ 2

Тема: Круги Эйлера решение задач.
Цель:научиться применять круги Эйлера в решении задач.
Материальное обеспечение:Практическая работа.

Общие теоретические положения

Эйлеровы круги (круги Эйлера) — принятый в логике способ моделирования, наглядного изображения отношений между объемами понятий с помощью кругов, предложенный знаменитым математиком Л. Эйлером (1707–1783).

Обозначение отношений между объемами понятий посредством кругов было применено еще представителем афинской неоплатоновской школы — Филопоном (VI в.), написавшим комментарии на «Первую Аналитику» Аристотеля.

Условно принято, что круг наглядно изображает объем одного какого-нибудь понятия. Объем же понятия отображает совокупность предметов того или иного класса предметов. Поэтому каждый предмет класса предметов можно изобразить посредством точки, помещенной внутри круга, как это показано на рисунке:

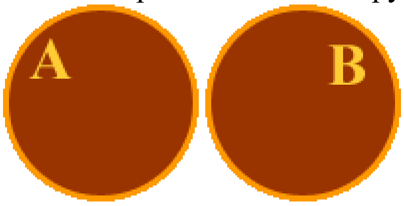
Группа предметов, составляющая вид данного класса предметов, изображается в виде меньшего круга, нарисованного внутри большего круга, как это сделано на рисунке.

Такое именно отношение существует между объемами понятий «небесное тело» (А) и «комета» (В). Объему понятия «небесное тело» соответствует больший круг, а объему понятия «комета» — меньший круг. Это означает, что все кометы являются небесными телами. Весь объем понятия «комета» входит в объем понятия «небесное тело».

В тех случаях, когда объемы двух понятий совпадают только частично, отношение между объемами таких понятий изображается посредством двух перекрещивающихся кругов, как это показано на рисунке:

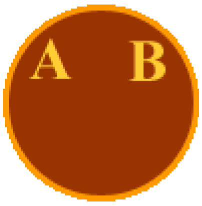
Такое именно отношение существует между объемом понятий «учащийся» и «комсомолец». Некоторые (но не все) учащиеся являются комсомольцами; некоторые (но не все) комсомольцы являются учащимися. Незаштрихованная часть круга А отображает ту часть объема понятия «учащийся», которая не совпадает с объемом понятия «комсомолец»; незаштрихованная часть круга В отображает ту часть объема понятия «комсомолец», которая не совпадает с объемом понятия «учащийся». Заштрихованиая часть, являющаяся общей для обоих кругов, обозначает учащихся, являющихся комсомольцами, и комсомольцев, являющихся учащимися.

Когда же ни один предмет, отображенный в объеме понятия А, не может одновременно отображаться в объеме понятия В, то в таком случае отношение между объемами понятий изображается посредством двух кругов, нарисованных один вне другого. Ни одна точка, лежащая на поверхности одного круга, не может оказаться на поверхности другого круга.



Такое именно отношение существует, например, между понятиями «тупоугольный треугольник» и «остроугольный треугольник». В объеме понятия «тупоугольный треугольник» не отображается ни один остроугольный треугольник, а в объеме понятия «остроугольный треугольник» не отображается ни один тупоугольный треугольник.

Отношения между равнозначащими понятиями, объемы которых совпадают, отображаются наглядно посредством одного круга, на поверхности которого написаны две буквы, обозначающие два понятия, имеющие один и тот же объем:



Такое отношение существует, например, между понятиями «родоначальник английского материализма» и «автор „Нового Органона“». Объемы этих понятий одинаковы, в них отобразилось одно и то же историческое лицо — английский философ Ф. Бэкон.

Нередко бывает и так: одному понятию (родовому) подчиняется сразу несколько видовых понятий, которые в таком случае называются соподчиненными. Отношение между такими понятиями изображается наглядно посредством одного большого круга и нескольких кругов меньшего размера, которые нарисованы на поверхности большего круга:

Такое именно отношение существует между понятиями «скрипка», «флейта», «пианино», «рояль», «барабан». Эти понятия в равной мере подчинены одному общему родовому понятию «музыкальные инструменты».

Круги, изображающие соподчиненные понятия, не должны касаться друг друга и перекрещиваться, так как объемы соподчиненных понятий несовместимы; в содержании соподчиненных понятий имеются, наряду с общими, различающие признаки. Эта схема отображает общее, что характерно для отношения любых соподчиненных понятий, взятых из различных областей знания. Это применимо к понятиям: «дом», «сарай», «ангар», «театр», подчиненных понятию «постройка»; к понятиям: «муха», «комар», «бабочка», «жук», «пчела», подчиненных понятию «насекомое» и т. д.

В тех случаях, когда между понятиями имеется отношение противоположности, отношение между объемами таких понятий отображается посредством одного круга, обозначающего общее для обоих противоположных понятий родовое понятие, а отношение между противоположными понятиями обозначается так: А — родовое понятие, В и С — противоположные понятия. Противоположные понятия исключают друг друга, но входят в один и тот же род, что можно выразить такой схемой:

При этом видно, что между противоположными понятиями возможно третье, среднее, так как они не исчерпывают полностью объема родового понятия. Такое именно отношение существует между понятиями «легкий» и «тяжелый». Они исключают друг друга. Нельзя об одном и том же предмете, взятом в одно и то же время и в одном и том же отношении, сказать, что он и легкий, и тяжелый. Но между данными понятиями есть среднее, третье: предметы бывают не только легкого и тяжелого веса, но также и среднего веса.

Когда же между понятиями существует противоречащее отношение, тогда отношение между объемами понятий изображается иначе: круг делится на две части так: А — родовое понятие, В и не-В (обозначается как ¬В) — противоречащие понятия. Противоречащие понятия, исключают друг друга и входят в один и тот же род, что можно выразить такой схемой:

При этом видно, что между противоречащими понятиями третье, среднее, невозможно, так как они полностью исчерпывают объем родового понятия. Такое отношение существует, например, между понятиями «белый» и «небелый». Они исключают друг друга. Нельзя об одном и том же предмете, взятом в одно и то же время и в одном и том же отношении, сказать, что он и белый и небелый.

Посредством Эйлеровых кругов изображаются также отношения между объемами субъекта и предиката в суждениях. Так, в общеутвердительном суждении, выражающем определение какого-либо понятия, объемы субъекта и предиката, как известно, равны. Наглядно такое отношение между объемами субъекта и предиката изображается посредством одного круга, подобно изображению отношений между объемами равнозначащих понятий. Разница только в том, что в данном случае всегда на поверхности круга надписываются две определенные буквы: S (субъект) и P (предикат), как это показано на рисунке:

Иначе выглядит схема отношения между объемами субъекта и предиката в общеутвердительном суждении, не являющемся определением понятия. В таком суждении объем предиката больше объема субъекта, объем субъекта целиком входит в объем предиката. Поэтому отношение между ними изображается посредством большого и малого кругов, как показано на рисунке:

1.2. Решение задач, применяя круги Эйлера.

Рассмотрим несколько задач, которые могут быть решены с применением кругов Эйлера на уроках математики или информатики.

Задачи

1. В классе 25 учащихся. Из них 5 человек не умеют играть ни в шашки, ни в шахматы. 18 учащихся умеют играть в шашки, 20 — в шахматы. Сколько учащихся класса играют и в шашки, и в шахматы?

2. Каждый из 35 пятиклассников является читателем, по крайней мере, одной из двух библиотек: школьной и районной. Из них 25 учащихся берут книги в школьной библиотеке, 20 — в районной. Сколько из пятиклассников:

а) не являются читателями школьной библиотеки;
б) не являются читателями районной библиотеки;
в) являются читателями только школьной библиотеки;
г) являются читателями только районной библиотеки;
д) являются читателями обеих библиотек?

3. Каждый ученик в классе изучает либо английский, либо французский язык, либо оба этих языка. Английский язык изучают 25 человек, французский — 27 человек, а тот и другой — 18 человек. Сколько всего учеников в классе?

4. На листе бумаги начертили круг площадью 78 см^2 и квадрат площадью 55 см^2. Площадь пересечения круга и квадрата равна 30 см^2. Не занятая кругом и квадратом часть листа имеет площадь 150 см^2. Найдите площадь листа.

5. В детском саду 52 ребенка. Каждый из них любит либо пирожное, либо мороженое, либо и то, и другое. Половина детей любит пирожное, а 20 человек — пирожное и мороженое. Сколько детей любит мороженое?

6. В ученической производственной бригаде 86 старшеклассников. 8 из них не умеют работать ни на тракторе, ни на комбайне. 54 ученика хорошо овладели трактором, 62 — комбайном. Сколько человек из этой бригады могут работать и на тракторе, и на комбайне?

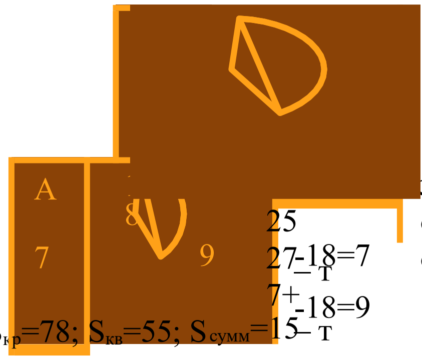
7. В классе 36 учеников. Многие из них посещают кружки: физический (14 человек), математический (18 человек), химический (10 человек). Кроме того, известно, что 2 человека посещают все три кружка; из тех, кто посещает два кружка, 8 человек занимаются в математическом и физическом кружках, 5 — в математическом и химическом, 3 — в физическом и химическом. Сколько человек не посещают никаких кружков?

8. 100 шестиклассников нашей школы участвовали в опросе, в ходе которого выяснялось, какие компьютерные игры им нравятся больше: симуляторы, квесты или стратегии. В результате 20 опрошенных назвали симуляторы, 28 — квесты, 12 — стратегии. Выяснилось, что 13 школьников отдают одинаковое предпочтение симуляторам и квестам, 6 учеников — симуляторам и стратегиям, 4 ученика — квестам и стратегиям, а 9 ребят совершенно равнодушны к названным компьютерным играм. Некоторые из школьников ответили, что одинаково увлекаются и симуляторами, и квестами, и стратегиями. Сколько таких ребят?

Ответы

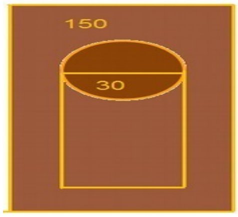
1.
А – шахматы 25-5=20 – чел. умеют играть
В – шашки 20+18-20=18 – чел играют и в шашки, и в шахматы

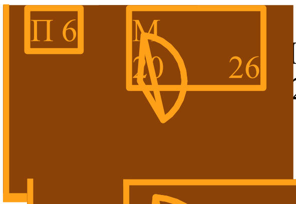
2. Ш – множество посетителей школьной библиотеки
Р – множество посетителей районной библиотеки
25+20-35=10
а) 10;
б) 15;
в) 15;
г)10;
д) 10.

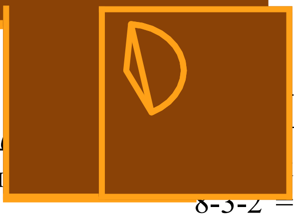


3. 34. ский, Ф – французский
25 олько английский
27-18=7 – т олько французский
7+ -18=9 – чел. в классе

4. 253. $S_{кр}$=78; $S_{кв}$=55; $S_{сумм}$=15 – т +55-30+150=253







5. 46. I – пирожное, М – мороженое
2-26-20=6 – детей любят пирожное

6. 38. трактор, К – комбайн
-62-(86-8)=38 – умеют работать и на тракторе и на комбайне

7. Спосо о ребят посещают только математический кружок: 18-8-5-2 = 3; только фи 8-5-2 =1; только химический: 10-5-3-2 = 0. Таким образом, три кружка посещают 2 ученика; два кружка — 16 учеников (8 + 3 + 5); один кружок — 4 ученика (3 + 1 + 0). Всего посещают кружки 2 + 16 + 4 = 22 ученика. Следовательно, кружки не посещают 36 - 22 = 14 ученика.

Способ 2. Представим множества учащихся, посещающих математический, физический и химический кружки, в виде кругов, вырезанных из плотной бумаги. Будем считать, что площадь каждого из этих кругов равна числу учащихся, посещающих соответствующий кружок. Наложим круги друг на друга так, чтобы было понятно, что есть учащиеся, посещающие один, два или три кружка. Вычислим площадь получившейся плоской фигуры: 14 + 18 + 10 - (8 + 5 + 3) - 2 - 2 = 22 — это и есть число учеников, посещающих кружки. Следовательно, кружки не посещают 36 - 22 = 14 учеников.

8. Пусть X — искомое число учеников, увлекающихся всеми видами компьютерных игр. Тогда: 20 + 28 + 12 + 13 + 6 + 4 + 9 + X = 100, X = 6.

Задание к работе:

1. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cup \overline{B}$.
2. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cap C$
3. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cup C$
4. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
5. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cup C$.
6. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A \cup B)$.
7. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \setminus (B \cap C)$.
8. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \cap B) \cup (C \setminus (A \cup B))$.
9. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \cap (B \cup C)$.
10. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(A \setminus B) \cap C$.
11. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cap (B \cup C)$.
12. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(A \cup B)} \cap C)$.
13. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cap C \cup \overline{B} \cap C$.
14. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cap (B \cup C)$.

15. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(B\cap C) \setminus A$.

16. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(A \cup B)} \cap C$.

17. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $C \setminus (C\cap (A\cup B))$.

18. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)}$.

19. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A\cap (B \cup \overline{C})$.

20. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A\cap B \cap \overline{C}$.

21. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $(B\cap C) \setminus A$.

22. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \setminus \overline{(B \cup C)}$.

23. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)}$.

24. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(A \cup B)} \cap C$).

25. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{A} \cup (B\cap C)$.

26. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{C} \setminus \overline{(A \cup B)}$.

27. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $A \cap \overline{B} \cup \overline{A} \cap B$.

28. Нарисовать диаграмму Эйлера-Венна для множества $\overline{(A \cup B)} \cap C$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое логическая переменная?

2. Что такое логическая функция?

3. Что такое таблица истинности?

4. Что такое логический элемент?

Практическая работа №3

Тема: Определение значения истинности высказываний. Построение составных высказываний.

Цель: Получение практических навыков построения формул логики высказываний, анализа их свойств.

Материальное обеспечение:Практическая работа.

Общие теоретические положения

Основным понятием математической логики является понятие «простого высказывания». Под высказыванием обычно понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, и при этом мы можем сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими значениями высказываний являются «истина» и «ложь».

Примеры высказываний.

1) Москва стоит на Неве.
2) Лондон — столица Англии.
3) Сокол не рыба.
4) Число 6 делится на 2 и на 3.

Высказывания 2), 3), 4) истинны, а высказывание 1) ложно.

Очевидно, предложение «Да здравствует Россия!» не является высказыванием.

Различают два вида высказываний.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть простым или элементарным. Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания 1) и 2).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если .... то ...», «тогда и только тогда», принято называть сложными или составными.

Так, высказывание 3) получается из простого высказывания «Сокол - рыба» с помощью отрицания «не», высказывание 4) образовано из элементарных высказываний «Число 6 делится на 2», «Число 6 делится на 3», соединенных союзом «и».

Аналогично сложные высказывания могут быть получены из простых высказываний с помощью грамматических связок «или», «тогда и только тогда».

В алгебре логики все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, а от их житейского содержания отвлекаются. Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Элементарные высказывания обозначаются малыми буквами латинского алфавита: *x, y, z, ..., a, b, c, ...;* истинное значение высказывания цифрой 1, а ложное значение - буквой цифрой 0.

Если высказывание *a* истинно, то будем писать *a = 1*, а если *a* ложно, то *a = 0*.

Логические операции над высказываниями

Отрицание.

Отрицанием высказывания x называется новое высказывание , которое является истинным, если высказывание *x* ложно, и ложным, если высказывание *x* истинно.

Отрицание высказывания *x* обозначается и читается *«не x»* или *«неверно, что x»*.

Логические значения высказывания можно описать с помощью таблицы.

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Таблицы такого вида принято называть

также является высказыванием, то можно образовать отрицание высказывания , то есть высказывание , которое называется двойным отрицанием высказывания *x*. Ясно, что логические значения высказываний *x* и совпадают.

Например, для высказывания «Путин президент России» отрицанием будет высказывание «Путин не президент России», а двойным отрицанием будет высказывание «Неверно, что Путин не президент России».

Конъюнкция.

Конъюнкцией (логическим умножением) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания *x и y* истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний *x и y* обозначается символом *x&y (, xy)* , читается *«x и y»* . Высказывания *x* и *y* называются членами конъюнкции.

Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Например, для высказываний «6 делится на 2», «6 делится на 3» их конъюнкцией будет высказывание «6 делится на 2 и 6 делится на 3», которое, очевидно, истинно.

Из определения операции конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания далеких друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний.

Дизъюнкция

Дизъюнкцией (логическим сложением) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний *x, y* истинно, и ложным, если они оба ложны. Дизъюнкция высказываний *x, y* обозначается символом *«x V y»* , читается *«x или y»* . Высказывания *x, y* называются членами дизъюнкции.

Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

В повседневной речи союз «или» употребляется в различном смысле: исключающем и не исключающем. В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в не исключающем смысле.

Импликация.

Импликацией двух высказываний х и у называется новое высказывание, которое считается ложным, если х истинно, а у - ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний *x, y* обозначается символом , читается *«если х, то у» или «из х следует у».* Высказывание *x* называют условием или посылкой, высказывание *y* - следствием или заключением, высказывание следованием или импликацией.

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Употребление слов «если .... то ...» в алгебре логики отличается от употребления их в обыденной речи, где мы, как правило, считаем, что, если высказывание *x* ложно, то высказывание *«Если х, то у»* вообще не имеет смысла. Кроме того, строя предложение вида *«если х, то у»* в обыденной речи, мы всегда подразумеваем, что предложение *y* вытекает из предложения *x* . Употребление слов «если ..., то ...» в математической логике не требует этого, поскольку в ней смысл высказываний не рассматривается.

Импликация играет важную роль в математических доказательствах, так как многие теоремы формулируются в условной форме *«Если х, то у».* Если при этом известно, что *x* истинно и доказана истинность импликации , то мы вправе сделать вывод об истинности заключения *y* .

Эквивалентность.

Эквивалентностью двух высказываний х и у называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания *х, у* либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквивалентность высказываний *x, y* обозначается символом , читается *«для того, чтобы х, необходимо и достаточно, чтобы у» или «х тогда и только тогда, когда у».* Высказывания *х, у* называются членами эквивалентности.

Логические значения операции эквивалентности описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах. Известно, что значительное число теорем формулируется в форме необходимых и достаточных условий, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух членов эквивалентности и доказав истинность самой эквивалентности, мы заключаем об истинности или ложности второго члена эквивалентности.

Задание к работе:

1. Установить логическую структуру следующих предложений и записать их на языке логики высказываний:

- Если металл нагревается, он плавится.
- Неправда, что философские споры неразрешимы.
- Деньги - продукт стихийного развития товарных отношений, а не результат договоренности или какого-либо иного сознательного акта.

2. Записать логической формулой следующие высказывания:
   а) если на улице дождь, то нужно взять с собой зонт или остаться дома;
   б) если - прямоугольный и стороны - равны, то
3. Проверить истинность высказывания:
   а) , если , .
   б) , если , .
   в) , если , , .
4. Проверить истинность высказывания:
   а) Чтобы завтра пойти на занятия, я должен встать рано. Если я сегодня пойду в кино, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, то встану поздно. Следовательно, либо я не пойду в кино, либо не пойду на занятия.
   б) Я пойду либо в кино, либо в бассейн. Если я пойду в кино, то получу эстетическое удовольствие. Если я пойду в бассейн, то получу физическое удовольствие. Следовательно, если я получу физическое удовольствие, то не получу эстетического удовольствия.
5. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал дискретную математику?» получен верный ответ: «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал дискретную математику?

6. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:
   если первый сдал, то и второй сдал;
   если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал;
   если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал;
   если четвертый сдал, то и первый сдал.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие элементы входят язык логики?
2. Какие способы установления общезначимости формулы логики вы знаете?

Практическая работа №4

Тема: Составление таблиц истинности для формул.

Цель:научиться составлять таблицы истинности по логическим формулам.

Материальное обеспечение:Практическая работа.

Общие теоретические положения

С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой (логическим выражением).

Логическая формула - это символическая запись высказывания, состоящая из логических величин (констант или переменных), объединенных логическими операциями (связками).

Логическая функция - это функция логических переменных, которая может принимать только два значения: 0 или 1. В свою очередь, сама логическая переменная (аргумент логической функции) тоже может принимать только два значения: 0 или 1.

Пример. $F(A,B) = A \& B \vee A$ – логическая функция двух переменных А и В.

Значения логической функции для разных сочетаний значений входных переменных – или, как это иначе называют, наборов входных переменных – обычно задаются специальной таблицей. Такая таблица называется **таблицей истинности**.

Приведем таблицу истинности основных логических операций (табл. 2)

Таблица 2

A	B	$\neg A$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	A XOR B
1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0

Опираясь на данные таблицы истинности основных логических операций можно составлять таблицы истинности для более сложных формул.

Алгоритм построения таблиц истинности для сложных выражений:

1. Определить количество строк:
   - количество строк = 2^n + строка для заголовка,
   - n - количество простых высказываний.
2. Определить количество столбцов:
   - количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;
   - определить количество переменных (простых выражений);
   - определить количество логических операций и последовательность их выполнения.

Пример 1. Составить таблицу истинности для формулы И–НЕ, которую можно записать так: $\neg(A \& B)$.

1. Определить количество строк:
   На входе два простых высказывания: А и В, поэтому n=2 и количество строк $=2^2+1=5$.
2. Определить количество столбцов:
   Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и двух логических операций (1 инверсия, 1 конъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 4.
3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 3).

Таблица 3. Таблица истинности для логической операции

A	B	$A \& B$	$\neg(A \& B)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Подобным образом можно составить таблицу истинности для формулы ИЛИ–НЕ, которую можно записать так:
$\neg(A \vee B)$.

Таблица 4. Таблица истинности для логической операции

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Примечание: **И–НЕ** называют также **«штрих Шеффера»** (обозначают |) или **«антиконъюнкция»**; **ИЛИ–НЕ** называют также **«стрелка Пирса»** (обозначают ↓) или **«антидизъюнкция»**.

Пример 2. Составить таблицу истинности логического выражения $C = \neg A \& B \vee A \& \neg B$.

Решение:

1. Определить количество строк:
   На входе два простых высказывания: А и В, поэтому n=2 и количество строк=2^2+1= 5.
2. Определить количество столбцов:
   Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и пяти логических операций (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 7. Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.
3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 5).

Таблица 5. Таблица истинности для логической операции $C = \neg A \& B \vee A \& \neg B$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \& B$	$A \& \neg B$	C
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0

Задание к работе:

1. Определить тождественно истинность формулы $x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$
2. Определить тождественно ложность формулы $\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$
3. Являетсяформула $\overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x} \cdot z$ выполнимой.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.

2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Для любой формулы можно составить таблицу истинности?
2. Как высчитать количество строк в таблице истинности?

Практическая работа №5

Тема: Приведение формул к совершенным нормальным формам

Цель: отработать навыки в приведении формул к совершенным нормальным формам; научиться применять и разрабатывать алгоритм, блок-схемы и программы, реализующих построение совершенных нормальных форм.

Материальное обеспечение: Практическая работа.

Общие теоретические положения

Элементы математической логики

Логика высказываний

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно. Истинность или ложность предложения есть истинное значение высказывания. Сопоставим каждому высказыванию переменную равную 1, если оно истинно и равную 0 если оно ложно. Если P и Q – некоторые высказывания, то можно образовать высказывания “P или Q”, “P и Q”, “не P”, введя операции дизъюнкции ($\vee$), конъюнкции(&) и отрицания. Действия этих операций задаются таблицами истинности (таб. 1-3), каждой строке которых взаимно однозначно соответствуют набор значений составляющих высказываний и соответствующее значение составного высказывания.

Таблица 1

P	Q	P $\vee$ Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 2

P	Q	P&Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 3

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания читаются как «или», «и» и «не».

Приведем основные законы, определяющие эти операции:

закон идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции

$a \vee a = a, \quad a \,\&\, a = a;$ (1)

закон коммутативности дизъюнкции и конъюнкции

$a \vee b = b \vee a, \quad a \,\&\, b = b \,\&\, a;$ (2)

закон ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,$

$a \,\&\, (b \,\&\, c) = (a \,\&\, b) \,\&\, c;$ (3)

закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции

$a \,\&\, (b \vee c) = a \,\&\, b \vee a \,\&\, c,$

$a \vee (b \,\&\, c) = (a \vee b) \,\&\, (a \vee c);$ (4)

закон двойного отрицания (5)

$\overline{\overline{a}} = a$

законы де Моргана

$a \vee b = a \& b,$ $\overline{a \& b} = a \vee b$ (6)

законы склеивания

$a \& b \vee a \& b = a,$ $(a \vee b) \& (a \vee b) = a$ (7)

законы поглощения

$a \vee a \& b = a,$ $a \& (a \vee b) = a$ (8)

законы Порецкого

$a \vee \overline{a} \& b = a \vee b,$ $a \& (\overline{a} \vee b) = a \& b$ (9)

Законы, определяющие действия с константой

$a \vee 0 = a$, $a \,\&\, 1 = a$, $\quad a \,\&\, 0 = 0, \quad a \vee 1 = 1$

$a \vee \bar{a} = 1, \quad a \,\&\, \bar{a} = 0 \qquad (10)$

Всякое высказывание, построенное с помощью операций «и», «или», «не», имеет некоторое истинное значение, зависящее от значений составляющих высказываний. Любое высказывание f может быть задано в виде таблицы истинности. Если значение высказывания зависит от n составляющих высказываний $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, то таблица истинности содержит 2^n строк. Составляющие высказывания x_i будем называть атомарными высказываниями или просто переменными x_i, рассматривая при этом сложное высказывание как функцию f от n переменных.

Построение совершенных нормальных форм.

Исчисление высказываний можно построить используя соответствующие таблицы истинности. Алгебра Буля простейшая в классе булевых алгебр; она является двухэлементной булевой алгеброй. Одним из элементов двухэлементной булевой алгебры является 0, так как булева алгебра является решеткой с дополнениями, поэтому вторым элементом этой алгебры является 1.

Каждое высказывание и соответствующую ему булеву функцию $f\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$ можно представить в виде дизъюнкции конституент $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma i}$, где

$$x_i^{\sigma i} = \begin{cases} xi & \sigma_i = 1 \\ \bar{x}_i, & \sigma_i = 0 \end{cases}.$$

Пример 1. Рассмотрим пример высказывания $f(x_1,x_2,x_3)$, заданное таблицей истинности (таб. 4)

Таблица 4.

x_1	X_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$		x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0		1	0	0	0
0	0	1	0		1	0	1	1
0	1	0	0		1	1	0	1
0	1	1	1		1	1	1	1

Согласно предыдущему утверждению функция $f(x_1,x_2,x_3)$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

В дальнейшем представление булевой функции $f(x_1,x_2 \ldots x_n)$ в виде дизъюнкции конституент будем называть совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) функции $f(x_1,x_2 \ldots x_n)$. Переменную или ее отрицание будем называть первичным термом. Количество первичных термов, которые образуют форму, называют сложностью $L(f)$ этой формы.

Сложность СДНФ функции из примера равна 12. Для уменьшения сложности этой функции используют основные тождества алгебры Буля (законы 1-8). Согласно свойству идемпотентности дизъюнкции имеем:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Используя свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, получаем:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (\bar{x}_1 \vee x_1) x_2 x_3 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) x_1 x_3 \vee (x_3 \vee \bar{x}_3) x_1 x_2$$

Окончательно имеем

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 = x_3 (x_2 \vee x_1) \vee x_1 x_2$$

В результате получаем сложность L(f) функции $f(x_1,x_2,x_3)$ равную 5.

Аналогично можно каждое высказывание и соответствующую ему булеву функцию $f\,(x_1,x_2,\ldots x_n)$ представить в виде конъюнкции конституент $\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma i}$, где

$x_i^{\sigma i} = \{ xi$,

$$\sigma_{ii} = \begin{cases} 0 \\ x_i, \quad \sigma_i = 1 \end{cases}.$$

В дальнейшем представление булевой функции $f(x_1,x_2 \ldots x_n)$ в виде конъюнкции дизъюнкций будем называть совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) функции $f(x_1,x_2 \ldots x_n)$. Для примера 1 функция $f(x_1,x_2,x_3)$ может быть представлена в виде:

$f(x_1,x_2,x_3)= (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \& (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

Булевы функции двух переменных

Любое сложное высказывание можно представить в виде выражения, в которое входят простые высказывания (переменные) x_i операции дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и, быть может, скобки. Рассмотрим, каким свойствам должны удовлетворять операции, с помощью которых можно выражать любое сложное выражение.

Суперпозицией системы

$S = \{\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{k1}), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{k2}), \ldots, \varphi_l(x_1, x_2, \ldots, x_l)\}$ называется любая функция f, полученная:

а) из $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_{kj})$ переименованием переменных, $\varphi_j \in S$;

б) подстановкой вместо некоторых переменных функции $\varphi_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_{k\alpha})$ функций $\varphi_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_{k\beta})$ $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in S$.

в) с помощью многократно применения пунктов а) и б).

Система S называется полной в P_k, если любая функция $f \in P_k$ представима в виде суперпозиции этой системы; система S называется базисом, если полнота S теряется при удалении хотя бы одной функции, где P_k – k-значная логика.

Построим все булевы функции от двух переменных (таб.5)

Таблица5

переменные		Булевы функции															
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Индекс i функциональной переменной f_i, $i=0,1,2,\ldots,15$, равен десятичному эквивалентному набору значений этой функции, читаемой сверху вниз. Приведем эти булевы функции:

$f_0(x_1,x_2)=0$ – константа 0;

$f_1(x_1,x_2)= x_1 x_2$ *конъюнкция;*

$f_2(x_1,x_2)= x_1 \bar{x}_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee x_2} = \overline{x_1 \to x_2} = x_1 \not\to x_2$ *- левая коимпликация (читается «не если x_1, то x_2);*

$f_3(x_1,x_2)= x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_1$;

$f_4(x_1,x_2)= \bar{x}_1 x_2 = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{x_1 \leftarrow x_2} = x_1 \not\leftarrow x_2$ *- правая коимпликация;*

$f_5(x_1,x_2)= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = x_2$

$f_6(x_1,x_2)= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 \oplus x_2$ - *сложение по модулю 2 или функция неравнозначности, неэквивалентности;*

$f_7(x_1,x_2)=$ $f_{11}(x_1,x_2)=f_{12}(x_1,x_2)=$

$f_8(x_1,x_2)=$

$f_9(x_1,x_2)=$

$f_{10}(x_1,x_2)=$

$x_1 \vee x_2$ – *дизъюнкция;*

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \circ x_2$ – *функция Вебба;*

$x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = x_1 \sim x_2$ – *функция эквивалентности, равнозначности;*

$\bar{x}_2$ – *отрицание;*

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_2 \vee x_1 = x_1 \leftarrow x_2$ – *правая импликация (читается « если x_2, то x_1);*

$\bar{x}_1$ – *отрицание;*

$f_{13}(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \rightarrow x_2$ *левая импликация (читается « если x_1, то x_2);*

$f_{14}(x_1,x_2)$= $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = x_1 \mid x_2$ *- функция Шеффера;*

$f_{15}(x_1,x_2)$=1– константа 1.

Задание к работе:

1. Изучить теоретический материал по теме практического занятия
2. По заданной таблице истинности построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

x_1	X_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$		x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0			1	0	0	
0	0	1			1	0	1	
0	1	0			1	1	0	
0	1	1			1	1	1	

3. По заданной таблице истинности построить совершенную конъюнктивную нормальную форму.
4. Определить сложность форм и выполнить упрощение их. Объясните полученные результаты
5. Разработать блок-схему алгоритма получения СДНФ и СКНФ.
6. Реализовать на языке программирования блок-схему алгоритма получения СДНФ и СКНФ (по выбору).
7. Выписать в отчет ход выполнения работы и выводы.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется высказыванием?
2. Докажите с помощью таблиц истинности основные законы алгебры Буля.
3. Что называется атомарным высказыванием?
4. Что называют совершенной дизъюнктивной нормальной формой? Как выполняется ее построение?
5. Что называют совершенной конъюнктивной нормальной формой? Как выполняется ее построение?
6. Что является сложностью формы и как ее определять.

Практическая работа №6

Тема: Упрощение формул логики до минимальной ДНФ.

Цель:научиться упрощать формулы до минимальной ДНФ.

Материальное обеспечение:Практическая работа.

Общие теоретические положения

Минимизация формул булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм

Как было установлено выше, произвольная булева функция может быть представлена формулой в ДНФ и КНФ, причем такое представление неоднозначно. Равносильными преобразованиями можно получить формулу, содержащую меньшее число вхождений переменных. Например, две различные формулы: $f_1(x_1, x_2) = x_1 \mathrm{V}\ x_1\&x_2\ \mathrm{V}\ \neg x_2$ и $f_2(x_1, x_2) = x_1\ \mathrm{V}\ \neg x_2$ равносильны, так как в силу 2-го закона поглощения (равносильность 6б из раздела 4.3) $x_1\ \mathrm{V}\ x_1\&x_2 \equiv x_1$.

Но в формуле $f_1(x_1, x_2)$ содержится четыре вхождений переменных, а в формуле $f_2(x_1, x_2)$ – два.

Определение. ДНФ называется *минимальной,* если она содержит наименьшее общее число вхождений переменных среди всех равносильных ей ДНФ.

Определение. *Импликантом* булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется элементарная конъюнкция С, не равная тождественно 0, такая что $C\ \mathrm{V}\ f \equiv f$. Отметим, что любая конъюнкция любой ДНФ в силу закона идемпотентности (равносильность 5б) является импликантом этой функции.

Определение. Импликант C функции f называется *простым импликантом*, если после отбрасывания любой переменной из C получается элементарная конъюнкция, не являющаяся импликантом функции f.

Пример.

Для функции $x\&y\mathrm{V}x\&z\mathrm{V}x\&y\&z \equiv x\&(y\mathrm{V}z)$ конъюнкции $x\&y$ и $x\&z$ – простые импликанты, а $x\&y\&z$ – импликант, но не простой.

Определение. Дизъюнкция всех простых импликантов булевой функции f называется *сокращенной ДНФ функции f.*

Для нахождения сокращенной ДНФ используется следующий алгоритм, в основе которого лежит метод Квайна.

Алгоритм . (Алгоритм Квайна построения сокращенной ДНФ).

Шаг 1. Находим для данной булевой функции f ее формулу F, находящуюся в СДНФ.

Шаг 2. Находим все простые импликанты функции f. Для этого все элементарные конъюнкции формулы F попарно сравниваем между собой. Если две элементарные конъюнкции таковы, что они имеют вид $C\&x_i$ и $C\&\neg x_i$, то выписываем конъюнкцию С. Это является следствием 1-го закона расщепления (склеивания) (равносильность 7а). Конъюнкция С содержит n - 1 вхождение переменных. Элементарные конъюнкции, для которых произошло склеивание, помечаем. После построения всех конъюнкций, включающих n - 1 вхождение переменных, вновь сравниваем их попарно, производим, если возможно, склеивание, выписываем полученные конъюнкции из n - 2 членов, помечаем склеивающиеся конъюнкции из n - 1 членов и т. д. Процесс заканчивается, когда дальнейшее склеивание невозможно. Все непомеченные элементарные конъюнкции являются простыми импликантами. Их дизъюнкция даст нам формулу F_1, равносильную F, находящуюся в ДНФ и состоящую из простых импликантов, т.е. сокращенную ДНФ.

Пример.

Найдем сокращенную ДНФ функции из примера 4.4:

$f(x_1, x_2, x_3) = \neg(x_2 \supset \neg x_3) \sim (\neg x_1 \mathrm{V} x_2)$.

1. Шаг 1 был выполнен ранее (см. примеры 4.13, 4.15). СДНФ формулы $f(x_1, x_2, x_3)$ является формула

$F(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1\&x_2\&x_3 \mathrm{V}\ x_1\&\neg x_2\&\neg x_3\ \mathrm{V}\ x_1\&\neg x_2\&x_3\ \mathrm{V}\ x_1\&x_2\&x_3$.

2. Попарно сравниваем все 4 трехчленные конъюнкции (всех сравнений $C_4^2 = 6$) и применяем, где это возможно, закон склеивания:

$\neg x_1\&x_2\&x_3 \mathrm{V} x_1\&x_2\&x_3 = x_2\&x_3$.

$x_1\&\neg x_2\&\neg x_3 V x_1\&\neg x_2\&x_3 = x_1\&\neg x_2$.
$x_1\&\neg x_2\&x_3 V x_1\&x_2\&x_3 = x_1\&x_3$.
Итак, на первом этапе получили 3 двучленные конъюнкции:
$x_2\&x_3$, $x_1\&\neg x_2$, $x_1\&x_3$.
Все трехчленные конъюнкции оказались помеченными.
Попарно сравниваем все 3 двучленные конъюнкции (всех сравнений 3) и замечаем, что склеивание невозможно.
В результате получим сокращенную ДНФ формулы f:
$F_1(x_1, x_2, x_3) = x_2\&x_3 \text{ V } x_1\&\neg x_2 \text{ V } x_1\&x_3$.
На практике для построения сокращенной ДНФ удобнее пользоваться модифицированным методом Квайна – Мак-Класки. Этот метод состоит в автоматизации процесса склеивания. Разберем этот метод на конкретном примере.
Алгоритм . (Алгоритм Квайна - Мак-Класки построения сокращенной ДНФ).
Шаг 1. Составим таблицу значений булевой функции (если функция задана формулой в СДНФ, то в силу замечания к алгоритму 4.3 это всегда можно сделать)
Для нашего примера такая таблица уже составлена – это таблица 4.4.
Очевидно, в силу алгоритма 4. 3 (см. также пример 4.15), эта функция имеет следующую формулу в СДНФ:
$f(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1\&x_2\&x_3 V\ x_1\&\neg x_2\&\neg x_3 \text{ V } x_1\&\neg x_2\&x_3 \text{ V } x_1\&x_2\&x_3$.
Шаг 2. Выпишем наборы переменных, на которых функция принимает значение 1, причем эти наборы упорядочим по группам так, что в каждую группу входят наборы с одинаковым числом единиц. Пусть A_i – группа наборов переменных, таких, что каждый набор содержит i единиц, и функция на этом наборе переменных принимает значение, равное единице.
Группы A_0 (где все переменные нули, а значение функции равно 1) нет.
Группа A_1 (где одна переменная единица, остальные нули, и значение функции равно 1):
1 0 0
Группа A_2:
0 1 1
1 0 1
Группа A_3:
1 1 1
Шаг 3. Производим попарное сравнение наборов переменных, входящих в соседние группы. Если при этом сравнении обнаружатся два набора, которые отличаются только в одном разряде, то вместо них записывается один набор, в котором вместо несовпадающих разрядов ставится “ – “ (прочерк). После всех возможных сравнений из предшествующего списка вычеркиваются все наборы, которые участвовали в образовании хотя бы одного набора с прочерком. Формируются два массива наборов: наборы с прочерками (массив P) и невычеркнутые (массив R).
Эти действия соответствуют склеиванию конъюнкций и уменьшению числа вхождений переменных.
Для нашего примера при сравнении групп A_1 и A_2:
вместо (1 0 0) и (1 0 1) получим (1 0 –);
При сравнении групп A_2 и A_3:
вместо (0 1 1) и (1 1 1) получим (– 1 1);
вместо (1 0 1) и (1 1 1) получим (1 – 1);
После этого этапа массив R пуст, т. к. все наборы участвовали в образовании наборов с прочерками, а массив $P = P(1)$ включает следующие наборы:
(1 0 –);
(– 1 1);
(1 – 1).
Далее рассмотрим наборы с прочерками. Они вновь попарно сравниваются между собой. При этом имеет смысл сравнивать лишь наборы, в которых прочерк стоит в совпадающих разрядах. Если сравниваемые наборы отличаются друг от друга только в одном разряде, то выписываем

набор с двумя прочерками (старым и новым). После всех попарных сравнений из множества наборов с одним прочерком вычеркиваются все наборы, имеющие один прочерк и участвовавшие в образовании набора с двумя прочерками. Наборы с одним прочерком, не участвовавшие в образовании наборов с двумя прочерками, помещаются в массив R.

Для нашего примера попарное сравнение наборов с одним прочерком не приводит к образованию наборов с двумя прочерками.

Далее рассмотрим наборы с двумя прочерками и т. д. Процесс прекращается, если на очередном шаге все рассматриваемые наборы попадают в R. Нетрудно убедиться, что каждому набору из R соответствует простой импликант, причем единице соответствует переменная, взятая без отрицания, нулю – переменная, взятая с отрицанием, а прочерку – отсутствие соответствующей переменной. Сокращенная ДНФ есть дизъюнкция этих простых импликантов.

Для нашего примера процедура сравнения заканчивается после формирования наборов с одним прочерком. Массив R после этого включает наборы:

(1 0 –);

(– 1 1);

(1 – 1).

Сокращенная ДНФ имеет вид:

$f(x_1, x_2, x_3) = x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2 \vee x_1\&x_3$.

Далее процесс нахождения минимальной ДНФ сводится к отбрасыванию некоторых простых импликантов.

Определение. Простой импликант называется *существенным (ядровым) импликантом,* если его удаление из сокращенной ДНФ функции приводит к ДНФ, которая не равносильна исходной ДНФ.

Построение минимальной ДНФ сводится к отбрасыванию несущественных импликантов из сокращенной ДНФ.

Определение. Будем говорить, что элементарная конъюнкция *Апокрывает* элементарную конъюнкцию В, если она является частью этой конъюнкции, т.е. целиком входит в нее.

Пример .

Элементарная конъюнкция $x_1\&\neg x_2$ покрывает элементарные конъюнкции $x_1\&\neg x_2\&x_3$ и $x_1\&\neg x_2\&\neg x_3$, но не покрывает элементарные конъюнкции $x_1\&x_2\&x_3$ и $\neg x_1\&\neg x_2\&\neg x_3$.

Нахождение минимальной ДНФ состоит в выборе таких простых импликантов из сокращенной ДНФ, которые в совокупности покрывают все элементарные конъюнкции СДНФ и содержат минимальное число вхождений переменных. Такая ДНФ равносильна СДНФ, т. к. в силу определения 4.15 ее значения на некотором наборе переменных совпадают со значениями СДНФ.

Рассмотрим следующий алгоритм нахождения минимальной ДНФ.

Алгоритм. (Алгоритм построения минимальной ДНФ с помощью таблицы покрытий).

Шаг 1. Составление таблицы покрытий.

Дляданной функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^{k} A_i \equiv \bigvee_{j=1}^{m} B_j,\ m \le k,$$

где A_i –элементарные конъюнкции, входящие в СДНФ, $i = 1, 2, \dots, k$, $k \le n$, а B_j – простые импликанты сокращенной ДНФ, $j = 1, 2, \dots, m$, $m \le k$, построим таблицу покрытий, число строк которой равно числу полученных простых импликантов, а число столбцов – числу элементарных конъюнкций в СДНФ. Если в некоторую элементарную конъюнкцию входит какой-либо простой импликант, то на пересечении соответствующего столбца и строки ставится метка (например, “ * “).

Шаг 2. Выделение столбцов, содержащих одну метку.

Если в каких-нибудь столбцах составленной таблицы имеется только одна метка, то строки, в которых стоят эти метки, определяют простые импликанты, которые не могут быть исключены из сокращенной ДНФ, т. к. без них не может быть получено покрытие всех элементарных конъюнкций СДНФ. Они являются существенными и обязательно входит в минимальную ДНФ. Поэтому из таблицы покрытий исключаются строки, соответствующие существенным импликантам, и столбцы элементарных конъюнкций СДНФ, покрывемые этими существенными импликантами.

Шаг 3. *Вычеркивание лишних столбцов*.

Если в таблице есть столбцы, в которых имеются метки в одинаковых строках, то оставляем только один из них (все равно, какой), так как покрытие элементарных конъюнкций, соответствующих выброшенным столбцам, осуществляется за счет простого импликанта, соответствующего оставшемуся столбцу.

Шаг 4. Вычеркивание лишних существенных импликантов.

Если после выбрасывания некоторых столбцов в результате шага 3, в таблице появляются строки, в которых нет ни одной метки, то простые импликанты, соответствующие этим строкам, исключаются из дальнейшего рассмотрения, т. к. они не покрывают оставшиеся в рассмотрении элементарные конъюнкции СДНФ.

Шаг 5. Выбор минимального покрытия существенными импликантами.

Выбирается такая совокупность строк (т. е. существенных импликантов), чтобы они покрывали все оставшиеся столбцы (элементарные конъюнкции СДНФ). При нескольких возможных вариантах предпочтение отдается варианту покрытия с минимальным общим числом вхождения переменных.

Пример.

Продолжим предыдущий пример.

1. Составляем таблицу покрытий. Для формулы, булевой функции с СДНФ:

$f(x_1, x_2, x_3) = \neg x_1\&x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&\neg x_3 \vee x_1\&\neg x_2\&x_3 \vee x_1\&x_2\&x_3$

мы получили равносильную ей сокращенную ДНФ:

$F_1(x_1, x_2, x_3) = x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2 \vee x_1\&x_3$.

Каждой элементарной конъюнкции $x_1^{s_1}\&x_2^{s_2}\&...\&x_n^{s_n}$, ($x_i^{s_i} = x_i$, если $s_i = 0$ и $x_i^{s_i} = \neg x_i$, если $s_i = 1$, $i = 1, 2, ..., n$), входящей в СДНФ, можно сопоставить набор переменных из нулей и единиц. Этот наборы идентифицируют столбцы. Каждому простому импликанту из сокращенной ДНФ также можно сопоставить набор из нулей, единиц и прочерков, где 0 означает, что переменная берется с отрицанием, 1 – переменная берется без отрицания, “ – ” – переменная отсутствует. Для нашего примера получим следующую таблицу (таблица 4.6) из 4 столбцов, соответствующих 4 элементарным конъюнкциям СДНФ $F(x_1,x_2, x_3, x_4)$ и 3 строк, соответствующих 3 простым импликантам сокращенной ДНФ $F_1(x_1,x_2, x_3, x_4)$.

Таблица

	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 1
– 1 1	*			*
1 0 –		*	*	
1 – 1			*	*

2. Выделяем столбцы, содержащие одну метку – это 1-ый и 2-ой столбцы. Импликант $x_2\&x_3$ (ему соответствует 1-ая строка) является существенным. Он покрывает две элементарные конъюнкции СДНФ: $\neg x_1\&x_2\&x_3$ и $x_1\&x_2\&x_3$ (им соответствуют 1-ый и 4-ый столбцы). Импликант $x_1\&\neg x_3$ (ему соответствует 2-ая строка) тоже является существенным. Он покрывает две элементарные конъюнкции СДНФ: $x_1\&\neg x_2\&\neg x_3$ и $x_1\&\neg x_2\&x_3$ (им соответствуют 2-ой и 3-ий столбцы).

Все указанные строки (1-ую и 2-ую) и столбцы (1-ый, 2-ой, 3-ий и 4-ый) вычеркиваем из таблицы покрытий. После этого все элементы таблицы окажутся вычеркнутыми. Следовательно, два существенных импликанта $x_2\&x_3$ и $x_1\&\neg x_3$ покрывают все элементарные конъюнкции СДНФ. Итак, минимальная ДНФ для нашей функции имеет вид:

$F_2(x_1, x_2, x_3) = x_2\&x_3 \vee x_1\&\neg x_2$.
Рассмотрим еще один пример нахождения минимальной ДНФ булевой функции.
Пример.
Пусть булева функция задана таблицей

Таблица 4.7

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Применим вначале алгоритм Квайна - Мак-Класки для нахождения сокращенной ДНФ.
Очевидно, в силу алгоритма 4.3, данная функция имеет следующую формулу в СДНФ:
$F(x_1,x_2, x_3, x_4) = \neg x_1\&\neg x_2\&x_3\&x_4 \vee \neg x_1\&x_2\&\neg x_3 \&x_4 \vee \neg x_1\&x_2\&\neg x_3\&\neg x_4 \vee \neg x_1\&x_2\&x_3\&x_4 \vee x_1\&\neg x_2\&\neg x_3\&x_4 \vee x_1\&\neg x_2\&x_3\&x_4 \vee x_1\&x_2\&\neg x_3\&\neg x_4 \vee x_1\&x_2\&\neg x_3\&x_4$.
Выпишем наборы переменных, на которых функция принимает значение 1, причем эти наборы упорядочим по группам так, что в каждую группу входят наборы с одинаковым числом единиц.
Группы A_0 нет.
Группа A_1:
0 1 0 0
Группа A_2:
0 0 1 1
0 1 0 1
1 0 1 0
1 1 0 0
Группа A_3:
0 1 1 1
1 0 1 1
1 1 0 1
Группы A_4
нет.
Производим попарное сравнение наборов переменных, входящих в соседние группы.
При сравнении групп A_1 и A_2:
вместо (0 1 0 0) и (0 1 0 1) получим (0 1 0 –);
вместо (0 1 0 0) и (1 1 0 0) получим (– 1 0 0);
При сравнении групп A_2 и A_3:
вместо (0 0 1 1) и (0 1 1 1) получим (0 – 1 1);
вместо (0 0 1 1) и (1 0 1 1) получим (– 0 1 1);
вместо (0 1 0 1) и (0 1 1 1) получим (0 1 – 1);
вместо (0 1 0 1) и (1 1 0 1) получим (– 1 0 1);
вместо (1 0 0 1) и (1 0 1 1) получим (1 0 – 1);
вместо (1 0 0 1) и (1 1 0 1) получим (1 – 0 1);
вместо (1 1 0 0) и (1 1 0 1) получим (1 1 0 –).
После этого этапа массив R пуст, т. к. все наборы участвовали в образовании наборов с прочерками, а массив $P = P(1)$ включает следующие наборы:
(0 1 0 –);

(– 1 0 0);
(0 – 1 1);
(– 0 1 1);
(0 1 – 1);
(– 1 0 1);
(1 0 – 1);
(1 – 0 1);
(1 1 0 –).
Теперь попарно сравниваются между собой наборы с прочерками. Наборы с одним прочерком, не участвовавшие в образовании наборов с двумя прочерками, помещаются в массив R.
Для нашего примера
вместо (0 1 0 –) и (1 1 0 –) получим (– 1 0 –);
вместо (– 1 0 0) и (– 1 0 1) получим (– 1 0 –)
После этого этапа в массив R попадают наборы, не участвовавшие в образовании наборов с двумя прочерками:
(0 – 1 1);
(– 0 1 1)
(0 1 – 1);
(1 0 – 1);
(1 – 0 1);
Массив $P(2)$ состоит из набора с двумя прочерками:
(– 1 0 –).
Набор с двумя прочерками один и процедура сравнения заканчивается. Поэтому все наборы из $P(2)$ попадают в массив R, который после этого включает наборы:
(0 – 1 1);
(– 0 1 1)
(0 1 – 1);
(1 0 – 1);
(1 – 0 1);
(– 1 0 –).
Сокращенная ДНФ имеет вид:
$F_1(x_1,x_2, x_3, x_4) = \neg x_1\&x_3\&x_4 \vee \neg x_2\&x_3\&x_4 \vee \neg x_1\&x_2\&x_4 \vee x_1\&\neg x_2\&x_4 \vee x_1\&\neg x_3\&x_4\ x_2\&\neg x_3$.
Найдем теперь минимальную ДНФ с помощью таблицы покрытий (алгоритм 4.7).
Составляем таблицу покрытий.
Для нашего примера получим следующую таблицу (таблица 4.8) из 8 столбцов, соответствующих 8 элементарным конъюнкциям СДНФ $F(x_1,x_2, x_3, x_4)$ и 6 строк, соответствующих 6 простым импликантам сокращенной ДНФ $F_1(x_1,x_2, x_3, x_4)$.

Таблица 4.8

	00 11	01 00	01 01	01 11	10 01	10 11	11 00	11 01
0- 11	*			*				
- 011	*					*		
01- 1			*	*				
10- 1					*	*		
1- 01					*			*
-10-		*	*				*	*

Выделяем столбцы, содержащие одну метку – это 2-ой и 7-ой столбцы. Оба этих столбца определяют один и тот же импликант $x_2\&\neg x_3$ (ему соответствует 6-ая строка), который является существенным. Он покрывает следующие четыре элементарные конъюнкции СДНФ: $\neg x_1\&x_2\&\neg x_3\&x_4$, $\neg x_1\&x_2\&\neg x_3\&\neg x_4$, $x_1\&x_2\&\neg x_3\&\neg x_4$, $x_1\&x_2\&\neg x_3\&x_4$ (им соответствуют 2-ой, 3 - ий, 7 - ой и 8 - ой столбцы). Все указанные строки и столбцы вычеркиваем из таблицы покрытий.

После этого таблица примет вид:

Таблица 4.9

	00 11	01 11	10 01	10 11
0-11	*	*		
-011	*			*
01-1		*		
10-1			*	*
1-01			*	

В полученной таблице нет одинаковых столбцов. В полученной таблице нет пустых строк. Выбираем такую совокупность существенных импликантов, которая покрывает все столбцы и содержит наименьшее количество букв. Для нашей таблицы это импликанты $\neg x_1\&x_3\&x_4$ и $x_1\&\neg x_2\&x_4$ (1 - ая и 4 - ая строки таблицы 4. 9), т. к. они покрывают все оставшиеся столбцы.

Итак, минимальная ДНФ для нашей функции имеет вид:

$F_2(x_1,x_2, x_3, x_4) = \neg x_1\&x_3\&x_4 \ \ V \ \ x_1\&\neg x_2\&x_4 \ Vx_2\&\neg x_3$.

Задание к работе:

Для данной формулы булевой функции

а) найти ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ методом равносильных преобразований;

б) найти СДНФ, СКНФ табличным способом (сравнить с СДНФ, СКНФ, полученными в пункте “а”);

в) указать минимальную ДНФ и соответствующую ей переключательную схему.

Варианты заданий

Функц ия	Функц ия
1. ((xVy) ⊃ ¬z) Vx&y&z 2. ¬(x&(y⊃(xVz))) 3. (x⊃(z&(y~x))) 4. ¬(x~y)⊃ (xVz) 5. ¬(x⊃y) V (y⊃z) 6. (x&y)⊃ (¬(x&z) ~x) 7. (y⊃x) ~(x⊃z) 8. (x&¬y)⊃ ((¬xVz) &y) 9. ¬(x~y)⊃ (xVz) 10. ¬(x&y)⊃ ((xVz)⊃y) 11.x⊃(y⊃(z⊃ y&z)) 12. ((y&¬z) ⊃ (xV¬z))⊃ y 13. ¬(x&(y⊃ (x~z))) 14. (x⊃(x&(yV ¬(x~y)Vx))) 15. ¬(x⊃ z) V ¬(y ~ z)	16. ¬(x~y)⊃ (xVz) 17. x&y⊃ (¬x&z⊃ (xVy)) 18. (y⊃x) ~(¬x ⊃ z) 19. (x&¬y⊃ z) ⊃(x ~ z) 20. ¬(x&y⊃ z) ⊃ (x⊃ y) 21. ¬x⊃(y⊃ (z~x)) 22. y&¬z ⊃ (xV¬z&y) 23. ¬(x&(y⊃(z ~ y))) 24. x⊃(x&(yV ¬(x ~z))) 25. ¬(x⊃y)V ¬(y&(x~z)) 26. ¬(x ~ y)⊃¬(x ~z) 27. ¬(x ⊃ y)⊃ (x&z) 28. x⊃(z ⊃(x V y&z)) 29. x&(y⊃(z ~ y)) 30. ¬(x⊃ z) V (y ~ z)

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что означает сокращение СДНФ, СКНФ?

2. Как вычислить ДНФ, КНФ?

Практическая работа №7

Тема: Алгебра Буля. Решение задач
Цель: научиться решать задачи, применяя алгебру Буля.
Материальное обеспечение: Практическая работа.
Общие теоретические положения

Логические задачи в алгебре Буля.

В настоящее время методы математической логики внедряются в гуманитарные знания как аппарат, позволяющий быстро и эффективно перерабатывать огромные объемы информации. Эти методы, как правило, при объяснении понятий и существующих между ними отношений исключают ошибки, проистекающие за счет неточного толкования смысла понятий, благодаря использованию логических операций.

Впервые с идеей внедрения логики и математики в процесс познания закономерностей между объектами любой природы выступил немецкий философ и математик Лейбниц (1646-1716). Он предвидел возникновение новой области науки, названной им философским исчислением.

Философское исчисление, по идее Лейбница, должно представлять такую логическую систему, в которой все производные понятия выражались бы символами, составленными из известных простых символов, обозначающих элементарные понятия на основании строгих правил. Операции над символами должны производиться по аналогии с алгебраическими операциями так, чтобы формальным путем можно было получать все новые и новые понятия и умозаключения.

Грандиозный замысел Лейбница долгое время оставался без развития. Первый крупный шаг в осуществлении идей Лейбница был сделан Джорджем Булем (1815-1864). В период с 1847 по 1857 г. он опубликовал три работы. Первые две носили характер предварительных исследований. В третьей работе (это объемистая книга в 424 стр.) изложена, в сущности, вся система Буля. Здесь он демонстрирует, как при помощи символических алгебраических методов можно строить логические конструкции. Кроме того, он показывает, как его система может быть распространена на теорию вероятностей.

В этих работах Буль преследует еще одну цель: найти элементарные операции человеческого мышления, выйдя за рамки дедуктивной и индуктивной логики. Выражаясь современным языком, его исследования принадлежали к области кибернетики.

Буль впервые показал, что законы человеческого мышления могут быть формализованы так, что над понятиями могут производиться те же операции, что и над целыми числами. Но в отличие от арифметики, как он показал, формальные операции над понятиями подчиняются следующим двум законам: два одних и тех же понятия сложенные или перемноженные приводят к тому же понятию (в современной Булевой алгебре их называют – отсутствие коэффициентов и степеней).

На формирование Булевой алгебры как самостоятельной научной дисциплины оказали влияние исследования немецкого математика Эрнста Шредера (1841-1902), который дал математическую трактовку **закона исключенного третьего** аристотелевской логики.

Шредер допускал наличие классов больше двух и для оперирования с ними он сформулировал следующее правило: если среди членов некоторой суммы классов находится хотя бы один, который оказывается отрицанием другого, то вся сумма равна единице. Легко показать, что с помощью этого правила можно построить таблицу операции отрицания Булевой алгебры.

Символическое исчисление Буля Шредер называл логическим исчислением и признавал только три основных операции: сложение, умножение и отрицание; вычитание он считал не безусловно выполнимой операцией. Тем самым Шредер поставил вопрос об оптимальном количестве операций в логике классов.

Однако гениальная догадка Буля состояла в том, что только на множестве числа M={0;1} символическое исчисление не противоречит опыту человеческого мышления. Вопрос же об оптимальности количества операций и в логике классов, и в исчислении Буля решается неоднозначно.

Согласно современным представлениям, алгеброй Буля A_δ называют элементы множества M={0;1} с заданными в нем операциями S={“∨”,“∧”,“-“} дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Обозначается алгебра Буля так: A_δ =(M;S), здесь M – множество, S – сигнатура алгебры, т.е. набор операций. Переменные $x_1, x_2, x_3 \ldots x_i$ будем называть булевыми переменными. Эти переменные обозначают понятия или высказывания как неделимые понятия, если x_i =0, то высказывание ложно, если же x_i =1, высказывание истинно.

Рассмотрим следующие логические задачи, которые решаются на базе символического исчисления Буля.

<u>Задача 1</u>. Алеша, Боря и Гриша нашли в земле сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предложения:

Алеша. Это сосуд греческий и изготовлен в 5 веке.
Боря. Это сосуд финикийский и изготовлен в 3 веке.
Гриша. Это сосуд не греческий и изготовлен в 4 веке.

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предложений.

Где и в каком веке изготовлен сосуд?

С помощью Булевой переменной введем обозначения:

- Это сосуд греческий – x_1;
- Изготовлен в 5 веке – x_5;
- Это сосуд финикийский – x_2;
- Изготовлен в 3 веке – x_3;
- Это сосуд не греческий – $\overline{x_1}$;
- Изготовлен в 4 веке – x_4.

В этих обозначениях высказывания ребят кодируются логическими функциями следующим образом

Алеша: $\overline{f}_1 = x_1 x_5 \vee x_1 x_5$

Боря: $f_2 = x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3$

Гриша: $f_3 = \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_1 x_4$

Кроме того, ясно, что сосуд может быть изготовлен только в одном из веков и только в одной из стран. Эти условия позволяют ввести дополнительные логические функции:

$$f_4 = x_3 x_4 x_5 \vee x_3 x_4 x_5 \vee x_3 x_4 x_5,$$

$$f_5 = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$$

Полученные таким образом логические функции $\overline{f_i(i = 1,5)}$ представлены в совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Если придать всевозможные значения наборам переменных, от которых зависят указанные функции, то можно получить таблицы для $\overline{f_i(i = 1,5)}$.

Будем считать все f_i =1, тогда получим следующую систему уравнений Булевой алгебры

$$\begin{aligned}
&x_1 x_5 \vee x_1 x_5 = 1\\
&x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3 = 1\\
&\overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_1 x_4 = 1\\
&x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} x_5 = 1\\
&x_1 x_2 \vee x_1 x_2 = 1
\end{aligned} \qquad (1)$$

Система (1) представляет математическую модель искомой задачи. Один из способов решения (1) состоит в подборе тех единичных термов логических функций $f_i(i = 1,5)$, наборы переменных которых удовлетворяют системе (1), а значения переменных $x_i(i = 1,5)$ из этих наборов не противоречат друг другу.

Для нахождения всех единичных термов системы (1) необходимо произвести вычисление таблиц функций f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Это можно сделать с помощью программы *MicrosoftExcel*. Для этого:

1. Включите компьютер;
2. После того, как на экране монитора появится рабочий стол операционной *системы Windows, откройте окноMicrosoftExcel*;
3. *Заполните ячейки* A1÷B4 таблицы, перебрав все варианты значений логических переменных x_1 и x_5;
4. Постройте таблицу истинности для функции f_1, *воспользовавшись функциями* НЕ, И, ИЛИ, *которые находятся в мастере функций* ***fx*** *в категории* ЛОГИЧЕСКИЕ. Для этого:
   - *активизируйте ячейку* C2;
   - воспользуйтесь функцией **НЕ** (см. рис. 13.1);
   - *автозаполнением* занесите полученные результаты в ячейки C2÷C5 (рис. 13.2)

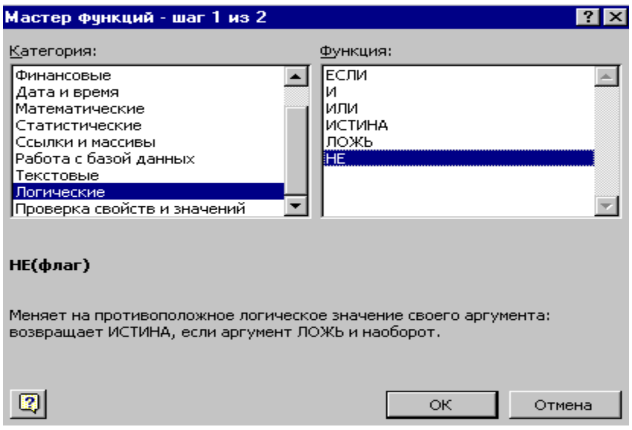


Рис. 13.1

	A	B	C	D
1	x1	x5	не x1	не x5
2	1	1	ЛОЖЬ	
3	1	0	ЛОЖЬ	
4	0	1	ИСТИНА	
5	0	0	ИСТИНА	
6				

Рис. 13.2

5. Аналогичным способом достроим таблицу истинности для функции f_1, используя функции И, ИЛИ. В результате получим значения для x_1 и x_5, изображённые на рис. 13.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	x1	x5	не x1	не x5	x1 и не x5	не x1 и x5	E1или F1		f 1
2	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ		
3	1	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА		
4	0	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА		
5	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ		

Рис. 13.3

Строя таблицы для функций $f_2 - f_5$ и, проводя аналогичные действия с переменными, получим следующие таблицы (рис. 13.4):

Таблица 1. **Таблица 2.** **Таблица 3.**

x_1	x_5	f_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x_2	x_3	f_2
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x_1	x_4	f_3
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 4. **Таблица 5.**

x_3	x_4	x_5	f_4
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

x_1	x_2	f_5
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

В таблицах 1 – 5 единичные наборы определяются теми наборами переменных, при которых логические функции имеют единичные значения. Для решения поставленной задачи необходимо выбрать пять единичных термов, значения переменных в которых не противоречивы.

В качестве таковых наборов переменных возьмём следующие:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \quad для \quad f_5;$$
$$x_1 = 0, \quad x_5 = 1 \quad для \quad f_1;$$
$$x_2 = 1, \quad x_3 = 0 \quad для \quad f_2;$$
$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0, \quad для \quad f_3$$
$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 1 \quad для \quad f_4$$

Из этих наборов переменных следует, что решение имеет вид:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 \qquad (2)$$

Непротиворечивость решения (2) надо понимать так: значение $x_1=0$ имеет место в наборах переменных для функций f_5, f_1, f_3 аналогично $x_5=1$ имеет место для f_1, f_4 и т.д.

Для проверки решения (2) подставим его в систему (1) и убедимся в том, что после этого уравнения системы (1) превращаются в тождества.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	x1	x5	не x1	не x5	x1 и не x5	не x1 и x5	E1или F1		f 1			
2	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ					
3	1	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА					
4	0	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА					
5	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ					
6												
7												
8	x2	x3	не x2	не x3	x2 и не x3	не x2 и x3	или(E7;F7)		f 2			
9	0	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА					
10	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ					
11	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ					
12	1	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА					
13												
14												
15	x1	x4	не x1	не x4	x1 и x4	не(x1 и x4)	или(E15;F15)					
16	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА		f 3			
17	1	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ					
18	0	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ					
19	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА					
20												
21												
22	x3	x4	x5	не x3	не x4	не x5	и(A22;E22;F22)	и(D22;B22;F22)	и(D22;E22;C22)	или(G22;H22;I22)		
23	1	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ		f 4
24	1	1	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ		
25	1	0	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА		
26	0	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ		
27	0	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ		
28	0	0	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА		
29	1	0	1	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ		
30	0	1	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА		
31												
32												
33	x1	x2	не x1	не x2	и(A33;D33)	и(C33;B33)	или(E33;F33)					
34	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ		f 5			
35	1	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА					
36	0	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА					
37	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ					

Рис. 13.4

Для воспроизведения решения (2) в словесной форме необходимо вспомнить высказывания, которые кодировались символами x_i. Из принятой кодировки следует, что $x_2=1$ означает, что сосуд – финикийский, а $x_5=1$ – сосуд изготовлен в 5-ом веке.

Задача 2. В школе произошло чрезвычайное происшествие: в классе кто-то из учеников разбил окно. Учителем были опрошены четыре ученика— Лёня, Дима, Толя и Миша. Каждый из учеников сделал по три заявления (см. таблицы 1 – 4). Учитель усомнился в одном из трёх заявлений каждого из опрошенных учеников. Последнее означает, что у каждого одно из трёх заявлений неверно. Из анализа всех заявлений необходимо узнать— кто разбил окно.

Таблица 6.

№	Показания Лёни	События	Вероятности	Переменные
1	Я не виноват.	A_1	$P(A_1)$	x_1
2	Я не подходил к окну.	A_2	$P(A_2)$	x_2
3	Миша знает, кто разбил окно.	A_3	$P(A_3)$	x_3

Таблица 7.

№	Показания Димы	События	Вероятности	Переменные
1	Стекло разбил не я.	B_1	$P(B_1)$	y_1
2	С Мишей я не был знаком до поступления в школу.	B_2	$P(B_2)$	y_2
3	Это сделал Толя.	B_3	$P(B_3)$	y_3

Таблица 8.

№	Показания Толи	События	Вероятности	Переменные
1	Я не виноват.	C_1	$P(C_1)$	z_1
2	Это сделал Миша.	C_2	$P(C_2)$	z_2
3	Дима говорит неправду, что я разбил окно.	C_3	$P(C_3)$	z_3

Таблица 9.

№	Показания Миши	События	Вероятности	Переменные
1	Я не виноват.	D_1	$P(D_1)$	s_1
2	Стекло разбил Лёня.	D_2	$P(D_2)$	s_2
3	Дима может поручиться за меня.	D_3	$P(D_3)$	s_3

Для получения вычислимого логического алгоритма решения данной задачи необходимо формализовать её условие, т.е. показаниям всех учеников придать форму математических соотношений, состоящих из символов, обозначающих понятия, и знаков логических операций, выполняемых над указанными символами.

С этой целью предположим, что каждое из показаний Лёни есть события A_1, A_2, A_3, которые могут произойти или не произойти. Вероятности того, что каждое из названных событий имело место, обозначим соответственно $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$. Вероятности же того, что события не имели место, обозначим через $\overline{P}(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$. При этом предполагается, что событие $\overline{A_1}$ противоположно событию A_1 и т.д. применительно к оставшимся событиям.

Событие A, состоящее в том, что из трёх показаний Лёни одно не верно, называется сложным событием. Оно составляется как комбинация простых событий следующим образом:

$$A = A_1 A_2 A_3 \vee A_1 A_2 A_3 \vee A_1 A_2 A_3 \qquad (3)$$

Здесь операция суммы событий заменена операцией дизъюнкции, а операция произведения — конъюнкцией. Такие законы обоснованы выше. Вероятность сложного события A обозначим через $P(A)$.В теории вероятностей значения вероятности могут принимать весь спектр числовых значений от нуля до единицы. Применительно к данной задаче будем считать, что вероятности P принимают только предельные значения: нуль илиединица. Это позволяет отождествлять вероятность P с Булевойпеременной x, т.е. ввести обозначения:

$P(A) = \overline{f_1}$, $P(A_1) = x_1$, $P(A_2) = x_2$, $P(A3) = x3$, $P(A1) = x1$, $P(A2) = x2$, $P(A3) = x3$. В этом случае $x = 1$ означает**истинность** данного события, а $x = 0$ — **ложность**. Аналогично $f_1 = 1$ говорит об **истинности** сложного события A, а $f_1 = 0$ — об его **ложности**.

Теперь, согласно теоремам о вероятности суммы и произведения нескольких событий, вероятность f_1 сложного события A определяется следующим образом:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \qquad (4)$$

Проводя аналогичные рассуждения для показаний остальных учеников, и используя обозначения таблиц 2 – 4, заявления Димы, Толи и Миши представим в форме следующих математических соотношений:

$$f_2 = y_1 y_2 y_3 \vee y_1 y_2 y_3 \vee y_1 y_2 y$$

$$f_3 = z_1 z_2 z_3 \vee z_1 z_2 z_3 \vee z_1 z_2 z_3$$

(5)

(6)

$$f_4 = s_1 s_2 s_3 \vee s_1 s_2 s_3 \vee s_1 s_2 s_3 \qquad (7)$$

Все эти логические формулы однотипны и представляют **совершенную дизъюнктивную нормальную форму** (СДНФ) одной и той же логической функции $f(abc)$.

$$f = abc \vee abc \vee abc \qquad (8)$$

Придавая набору, (abc) различные комбинации из нулей и единиц, подставляя их в (8) и производя вычисления с помощью таблиц операций конъюнкции и дизъюнкции, получаем таблицу 10 логической функции f.

Таблица 5.

j	$a\ b\ c$	f
0	0 0 0	0
1	0 0 1	0
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	0

В таблице 10 j обозначен десятичный код набора переменных, представляющего через множество трёхразрядных двоичных чисел.

Единичные значения логической функции f называются единичными термами. Для них введём новое обозначение $F_j\,(j = 3,5,6)$.

Единичные термы можно вычислять с помощью операций конъюнкции и отрицания по следующим формулам:

$$F_3 = abc;\ F_5 = abc;\ F_6 = abc \qquad (9)$$

Поскольку в формулах (9) главной операцией считается операция конъюнкции, то единичные термы называют конъюнктивными термами. Если три конъюнктивных терма объединить знаком дизъюнкции, то согласно теории логических функций, получим аналитическое представление функции в форме СДНФ (8).

Для получения явного вида конъюнктивных термов логических функций $\overline{f}_i\,(i = 1{,}4)$ необходимо вычислить таблицы этих функций с помощью программы *MicrosoftExcel*. Для этого:

6. *В окнеMicrosoftExcel заполните ячейки* A12÷C49 таблицы, перебрав все варианты значений логических переменных x_j, y_j, z_j и s_j;

- Постройте таблицу истинности для функций F^i_j, *воспользовавшись функциями* НЕ, И, ИЛИ, *которые находятся в мастере функций* ***fx*** *в категории* ЛОГИЧЕСКИЕ. См. пп. 4 – 5.

В конечном итоге получаем таблицу, показанную на рис. 13.5.

Из таблицы, изображённой на рис. 13.5, формируем таблицу 11, состоящую из конъюнктивных термов функций $\overline{f}_i\,(i = 1{,}4)$ и соответствующих им наборов переменных.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
10											
11	x1	x2	x3	не x1	не x2	не x3	И(D11;B11;C1	И(A11;E11;C11)	И(A11;B11;F11)	ИЛИ(G11;H11;I1	F1g
12	0	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
13	0	0	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
14	0	1	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
15	0	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	F13
16	1	0	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
17	1	0	1	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	F15
18	1	1	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	F16
19	1	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
20											
21	y1	y2	y3	не y1	не y2	не y3	И(D21;B21;C2	И(A21;E21;C21)	И(A21;B21;F21)	или(G21;H21;I21	F2g
22	0	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
23	0	0	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
24	0	1	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
25	0	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	F23
26	1	0	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
27	1	0	1	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	F25
28	1	1	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	F26
29	1	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
30											
31	Z1	Z2	Z3	НЕ(Z1)	НЕ(Z2)	НЕ(Z3)	И(D31;B31;C3	И(A31;E31;C31)	И(A31;B31;F31)	ИЛИ(G31;H31;I3	F3g
32	0	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
33	0	0	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
34	0	1	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
35	0	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	F33
36	1	0	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
37	1	0	1	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	F35
38	1	1	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	F36
39	1	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
40											
41	S1	S2	S3	НЕ(S1)	НЕ(S2)	НЕ(S3)	И(D41;B41;C4	И(A41;E41;C41)	И(A41;B41;F41)	ИЛИ(G41;H41;I4	F4g
42	0	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
43	0	0	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
44	0	1	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
45	0	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	F43
46	1	0	0	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	
47	1	0	1	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	F45
48	1	1	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	F46
49	1	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	

Рис. 13.5

Таблица 11.

f_1				f_2				f_3				f_4			
x_1	x_2	x_3	$F^1{}_J$	y_1	y_2	y_3	$F^2{}_J$	z_1	z_2	z_3	$F^3{}_J$	s_1	s_2	s_3	$F^4{}_J$
0	1	1	$F^1{}_3$	0	1	1	$F^2{}_3$	0	1	1	$F^3{}_3$	0	1	1	$F^4{}_3$
1	0	1	$F^1{}_5$	1	0	1	$F^2{}_5$	1	0	1	$F^3{}_5$	1	0	1	$F^4{}_5$
1	1	0	$F^1{}_6$	1	1	0	$F^2{}_6$	1	1	0	$F^3{}_6$	1	1	0	$F^4{}_6$

Здесь применительно к функции f_i конъюнктивный терм обозначен через $F^i{}_J$ так, что верхний индекс i соответствует номеру логической функции.

Если никто из учеников не отказался от своих высказываний, то значение всех логических функций $\overline{f}_i (i = 1,4)$ надо положить равными единице, после чего соотношения (4) – (7) примут вид следующей системы алгебраических уравнений для определения двенадцати неизвестных, которые представляются показаниями учеников в обозначениях таблиц 6 – 9:

$$
\begin{aligned}
&F^1_3 \vee F^1_5 \vee F^1_6 = 1\\
&F^2_3 \vee F^2_5 \vee F^2_6 = 1\\
&F^3_3 \vee F^3_5 \vee F^3_6 = 1\\
&F^4_3 \vee F^4_5 \vee F^4_6 = 1
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Здесь для обозначения конъюнктивных термов, входящих в $\overline{f}_i (i = 1,4)$ использован символ $\overline{F}^i_j (i = 1,4; j = 3, 5, 6)$. Соотношения (10) представляют математическую модель показаний учеников и их следует называть системой уравнений Булевой алгебры, так как они определены на множестве М={0;1} с использованием трёх логических операций – дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

В этой системе число неизвестных превышает число уравнений. Однако, так как $1 \vee 0 = 1$, то решение системы (10) будет определяться такими четырьмя термами: $F^1{}_j$, $F^2{}_j$, $F^3{}_j$, $F^4{}_j$, (j=3, 5, 6), наборы переменных, которых после подстановки в (10) и проведения логических вычислений превратят уравнение (10) в тождества. При этом термы $F^i{}_J$ вычисляются по формуле (9) с учётом обозначения переменных согласно таблице 11.

Среди комбинаций из указанных четырёх термов могут оказаться такие, значения наборов переменных которых могут привести к противоречивым показаниям учеников. Например, рассмотрим термы F^1_3, F^2_3, F^3_3, F^4_3.

Наборы переменных, соответствующие указанным термам, определяются по таблице 11. В таблице 12 приведены значения переменных, найденные из полученных наборов переменных, а также показания учеников, соответствующие данным значениям переменных.

Чтобы показать, что значения переменных из таблицы 12 суть решение системы (10) необходимо для этих значений вычислить по (9) строки и подставить их в тождества.

Здесь же в таблице 12 даются высказывания мальчиков, соответствующие рассмотренному решению. Из них следует, что все ученики виноваты. Последнее противоречит условию задачи.

Такое решение задачи в дальнейшем будем называть **противоречивым**

Таблица 12.

$F^1_3=1$	Показания Лёни.
$x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=1$	Я виноват. Я не подходил к окну. Миша знает, кто разбил окно.
$F^2_3=1$	Показания Димы.
$y_1=0$ $y_2=1$ $y_3=1$	Стекло разбил я. С Мишей я не был знаком до поступления в школу. Это сделал Толя.
$F^3_3=1$	Показания Толи.
$z_1=0$ $z_2=1$ $z_3=1$	Я виноват. Это сделал Миша. Дима говорит неправду, что я разбил окно.
$F^4_3=1$	Показания Миши.
$s_1=0$ $s_2=1$ $s_3=1$	Я виноват. Стекло разбил Лёня. Дима может поручиться за меня.

Рассмотрим другое решение: $F^1_3=1$, $F^2_6=1$, $F^3_5=1$, $F^4_6=1$. Значения переменных и показания учеников, соответствующие этому решению, приведены в таблице 13.

Таблица 13.

$F^1_3=1$	Показания Лёни.
$x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=1$	Я виноват. Я не подходил к окну. Миша знает, кто разбил окно.
$F^2_6=1$	Показания Димы.

$y_1=1$ $y_2=1$ $y_3=0$	Стекло разбил я. С Мишей я не был знаком до поступления в школу. Это не сделал Толя.
$F^3_5=1$	Показания Толи.
$z_1=1$ $z_2=0$ $z_3=1$	Я не виноват. Это не сделал Миша. Дима говорит неправду, что я разбил окно.
$F^4_6=1$	Показания Миши.
$s_1=1$ $s_2=1$ $s_3=0$	Я не виноват. Стекло разбил Лёня. Дима не может поручиться за меня.

Непротиворечивые показания этой таблицы говорят о том, что Лёня виноват и он разбил окно.

Решение, приводящее к логически непротиворечивому результату, назовём **непротиворечивым**.

Возникает вопрос: Как из множества решений выбрать одно – непротиворечивое?

Вернёмся к первоначальным заявлениям учеников (таблицы 6 – 9) и обратим внимание на то, что из четырёх заявлений – x_1, y_1, z_1, s_1 одно не верно.

По аналогии с рассуждениями, приводящими к формулам (3) и (4), указанную особенность четырёх заявлений можно выразить так:

$$f = \overline{x_1} y_1 z_1 s_1 \vee x_1 \overline{y_1} z_1 s_1 \vee x_1 y_1 \overline{z_1} s_1 \vee x_1 y_1 z_1 \overline{s_1} \qquad (11)$$

Теперь значения переменных из таблицы 13 подставим в правую часть формулы (11) и произведём вычисление f с помощью программы MicrosoftExcel. Для этого:

7. В ячейках A52 – D52 запишите значения переменных x_1, y_1, z_1 и s_1 из таблицы 13.

8. Далее, с помощью функций НЕ, И, ИЛИ найдём значение функции f.

   В данном случае получим: $f = f_{max} = 1$.
9. Аналогично вычислим f по (11) с использованием значений переменных из таблицы 12; тогда будем иметь: $f = f_{min} = 0$ (рис. 13.6).

M53 = =ИЛИ(J53;K53;L53;I53)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
50													
51	x1	y1	z1	s1	НЕ(x1)	НЕ(y1)	НЕ(z1)	НЕ(s1)	И(E51;B51;C51;D51	И(A51;F51;C51;D51	И(A51;B51;G51;D51	И(A51;B51;C51;H51	ИЛИ(I51;J51;K51;L
52	0	1	1	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА
53	0	0	0	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ

Рис. 13.6

Таким образом, непротиворечивое решение приводит к максимальным значениям логической функции (11). Последнее может означать, что логическая функция (11) представляется критерием отбора непротиворечивого решения системы (10) из множества решений. По аналогии с экономическими задачами линейного и нелинейного программирования, логическую функцию (11) следует назвать **целевой функцией**.

Теперь алгоритм решения данной задачи (10) – (11) сводится к следующему: перебираем всевозможные комбинации из четырёх термов F^1, F_j^2, F_j^3, F_j^4, затем применительно к каждой выбранной комбинации по таблице 11 определяем значения переменных, по которым вычисляем целевую функцию (11).

Тот вариант из четырёх единичных термов, который определит максимальное значение целевой функции (11), следует признать в качестве непротиворечивого решения.

Очевидно, что такой алгоритм требует большого объёма логических вычислений. Так, например, в рассматриваемой задаче, число комбинаций из четырех термов будет определяться числом сочетаний из двенадцати термов по четыре, т.е. $C_{12}^{4}=495$

Задание к работе:

Решите задачу, и сверти с ответом.

Задача 1. На заводе работали три друга: слесарь (с), токарь (т), шлифовщик (ш). Их фамилии: Борисов (Б), Иванов (В), Семенов (С).

Дополнительные сведения об указанных лицах таковы:

1 – у слесаря нет ни братьев, ни сестер;

2 – слесарь самый младший из друзей;

3 – Семенов женат на сестре Борисова;

4 – Семенов старше токаря.

Необходимо узнать: у кого какая специальность?

<u>Ответ</u>: Семенов – шлифовщик; Иванов – слесарь; Борисов – токарь.

Задача 2. В одном королевстве были незамужние принцессы, голодные тигры и приговоренный к казни узник. Но всякому узнику, осужденному на смерть полагалось угадать, в какой из двух комнат находиться тигр, а в какой принцесса. Хотя вполне могло быть, что король в обеих комнатах разместил принцесс, или что хуже, в обеих – тигров. Выбор надо было сделать на основании табличек на дверях комнат. Причём узнику было известно, что утверждения на табличках либо оба истинны, либо оба ложны. Надписи гласили:

По крайней мере, в одной из этих комнат находится принцесса	Тигр в другой комнате.

Какую дверь должен выбрать узник?

Ответ: в первой комнате – тигр, во второй – принцесса.

Задача 3. На соревнованиях по лёгкой атлетике Андрей, Боря, Серёжа и Володя заняли первые четыре места. Но когда девочки стали вспоминать, как эти места распределились между победителями, то мнения разошлись:

Даша: Андрей был первым, а Володя – вторым.

Галя: Андрей был вторым, а Борис – третьим.

Лена: Боря был четвёртым, а Серёжа – вторым.

Ася, которая была судьёй на этих соревнованиях и хорошо помнила как распределились места сказала, что каждая из девочек сделала одно правильное и одно неправильное заявление.

Кто из мальчиков и какое место занял?

Ответ: Андрей занял первое место, Серёжа – второе, Боря – третье, Володя – четвёртое.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какие операции называются бинарными и унарными? Приведите примеры унарных и бинарных операций в математике.
2. Поясните разницу между терминами “логическое выражение” и “логическая функция”.
3. Можно ли сказать, что таблица истинности однозначно определяет
а) логическое выражение;
б) логическую функцию.
4. Что такое вычислимое логическое выражение?
5. Что такое тавтология? противоречие? Приведите примеры.
6. Что такое равносильные выражения?

Практическая работа №8

Тема: Логические операции над предикатами.

Цель:научиться выполнять операции над предикатами.

Материальное обеспечение:Практическая работа.

Общие теоретические положения

1. Понятие предиката

В алгебре логики высказывания рассматриваются как нераздельные целые и только с точки зрения их истинности или ложности. Ни структура высказываний, ни их содержание не затрагиваются. В то же время и в науке, и в практике используются заключения, существенным образом зависящие как от структуры, так и от содержания используемых в них высказываний.

Например, в рассуждении «Всякий ромб - параллелограмм; *ABCD* - ромб; следовательно, *ABCD* - параллелограмм» посылки и заключение являются элементарными высказываниями логики высказываний и с точки зрения этой логики рассматриваются как целые, неделимые, без учета их внутренней структуры. Следовательно, алгебра логики, будучи важной частью логики, оказывается недостаточной в анализе многих рассуждений.

В связи с этим возникает необходимость в расширении логики высказываний, в построении такой логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках логики высказываний рассматриваются как элементарные.

Такой логической системой является логика предикатов, содержащая всю логику высказываний в качестве своей части.

Логика предикатов расчленяет элементарное высказывание на субъект (буквально — подлежащее, хотя оно и может играть роль дополнения) и предикат (буквально - сказуемое, хотя оно может играть и роль определения).

Субъект — это то, о чем что-то утверждается в высказывании; *предикат* - это то, что утверждается о субъекте.

Например, в высказывании «7 - простое число», «7» -субъект, «простое число» - предикат. Это высказывание утверждает, что «7» обладает свойством «быть простым числом».

Если в рассмотренном примере заменить конкретное число 7 переменной x из множества натуральных чисел, то получим *высказывательную форму «x* - простое число». При одних значенияхх, (например, x = 13, x =17) эта форма дает истинные высказывания, а при других значениях x (например, x = 10 , x = 18) эта форма дает ложные высказывания. Ясно, что эта высказывательная форма определяет функцию одной переменной x, определенной на множестве N, и принимающую значения из множества {1,0}.

Здесь предикат становится функцией субъекта и выражает свойство субъекта.

Определение. Одноместным предикатом P(x) называется произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значения из *множества {1,0}.*

Множество M, на котором определен предикат P(x) , называется областью определения предиката.

Множество всех элементов $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина», называется множеством истинности предиката P(x), то есть множество истинности предиката P(x) - это множество1p ={x| x∈ M, P(x) = 1}.

Так, предикат -P(x) - «x- простое число» определен на множестве N, а множество Ip для него есть множество всех простых чисел.

Предикат Q{x} - «sin$x$ = 0 » определен на множествеR, а его множество истинности I_Q= {x| x = πk; k∈Z}.

Предикат F(x) - «Диагонали параллелограмма x перпендикулярны» определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

Приведенные примеры одноместных предикатов выражают свойства предметов.

Рассмотрим примеры предикатов:

P(x): «$x^2 + 1 > 0$, $x \in R$»; область определения предиката M= R и область истинности – тоже R, т.к. неравенство верно для всех действительных чисел. Таким образом, для данного предиката $M = I_p$. Такие предикаты называются тождественно истинными.

B(x): «$x^2 + 1 < 0$, $x \in R$»; область истинности $I_p = \varnothing$, т.к. не существует действительных чисел, для которых выполняется неравенство. Такие предикаты называются тождественно ложными.

Определение. Предикат P(x), определенный на множестве M, называется тождественно истинным (тождественно ложным), если 1p = M (1p = ∅).

Предикат $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ – тождественно истинный, предикат $\sqrt{x-3} = -3$ - тождественно ложный.

Естественным обобщением понятия одноместного предиката является понятие многоместного предиката, с помощью которого выражаются отношения между предметами.

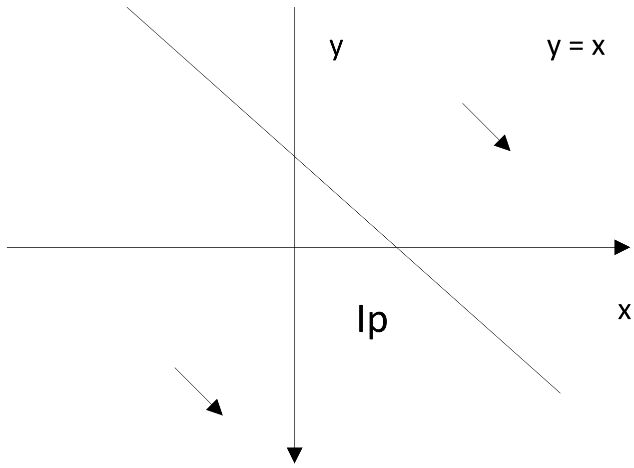
Примером отношения между двумя предметами является отношение «меньше» («больше»). Пусть это отношение введено на множестве Z целых чисел. Оно может быть охарактеризовано высказывательной формой «x< y»(«x >y») , где x, y $\in$ Z , то есть является функцией двух переменных P(x, y), определенной на множестве Z x Z с множеством значений {1,0}.

Определение.Двухместным предикатом P(x,y)называется функция двух переменных x и y (субъекты предиката), определенная на множестве $M = M_1 \times M_2$ ($x \in M_1$, $y \in M_2$) и принимающая значения из множества {1,0}.

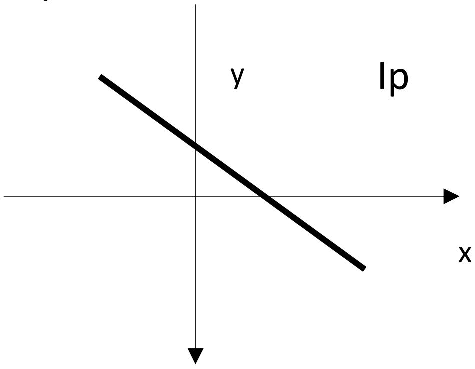
Найдем значения предиката «x< y» , где x, y $\in$ Z для пар (2,1), (4,4), (3,7):

Вместо x и y подставим указанные значения: P(2,1) = 0, т.к. 2>1; P(4,4)=0, т.к. 4 = 4; P(3,7)=1, т.к. 3<7. областью истинности этого предиката является множество всех пар целых чисел, удовлетворяющих данному неравенству.

Рассмотрим этот же предикат, но с областью определения $M = R^2$, тогда область его истинности можно представить графически: это все точки части плоскости (открытая, бесконечная область), лежащей ниже прямой y = x.



В числе примеров двухместных предикатов можно назвать предикаты: Q(x, y): « x = y » -предикат равенства, определенный на множестве M = R x R, область истинности которого – все точки прямой y = x :



Предикат F(x,y) : «x//y»- прямая x параллельна прямой y, определенный на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.
Аналогично определяется n-местный предикат.
Определение : n – местным предикатом называется функция $Q(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, определенная на множестве $M = M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$ и принимающая на этом множестве значение из множества {1, 0}.
Предикат P(x) является следствием предиката Q(x) ($Q(x)\rightarrow P(x)$), если $I_Q\subset I_P$.
Предикаты P(x) и Q(x) равносильны ($Q(x)\leftrightarrow P(x)$), если $I_Q=I_P$.
Для n –местных предикатов вводятся аналогичные понятия .
Примеры:

1. На множестве M= {3,4,5,6,7,8} заданы предикаты P(x) : «x – простое число», Q(x): «x – нечетное число». Составить таблицы истинности. Равносильны ли предикаты на множестве а) M; б) L = {2,3,4,5,6,7,8}; в) K = {3,4,5,6,7,8,9}?

Составим таблицы истинности предикатов на данных множествах:

M	P(x)	Q(x)	L	P(x)	Q(x)	K	P(x)	Q(x)
3	1	1	2	1	0	3	1	1
4	0	0	3	1	1	4	0	0
5	1	1	4	0	0	5	1	1
6	0	0	5	1	1	6	0	0
7	1	1	6	0	0	7	1	1
8	0	0	7	1	1	8	0	0
			8	0	0	9	0	1

На множестве M $I_P = I_Q$, следовательно, на этом множестве предикаты равносильны. На множествах L и K условие равносильности не соблюдается.

2. Будут ли предикаты равносильны или один из них является следствием другого, если область определения R?

$$a).P(x, y): \sqrt{x}\sqrt{y} = 15;\quad Q(x, y): \sqrt{xy} = 15.$$

Область допустимых значений x и y для P(x, y) : x>0 и y>0; область истинности – все точки ветви гиперболы y = 15/x, лежащей в первой четверти .Область допустимых значений x и y для Q(x, y) : x>0 и y>0, или x<0 и y<0; область истинности – все точки обеих ветвей гиперболы y = 15/x.

Значит, $I_P\subset I_Q$ и предикат Q(x) является следствием предиката P(x).

б) P(x): «$x^2\leq 0$», Q(x): «$2^{|x|} = \cos x$».

Область истинности предиката P(x) : x =0, область истинности предиката Q(x) : x = 0.

Значит, $I_P = I_Q$ и предикаты равносильны.

2. Логические операции над предикатами

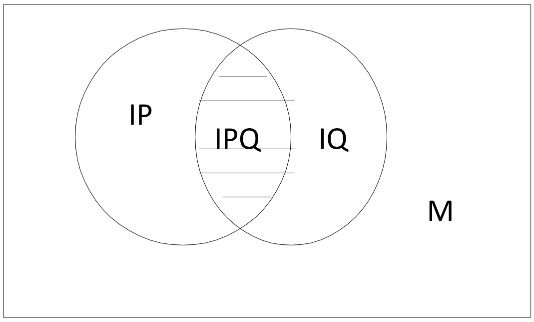
Предикаты, так же, как высказывания, принимают два значения истина и ложь (1, 0), поэтому к ним применимы все операции логики высказываний.

Рассмотрим применение операций логики высказываний к предикатам на примерах одноместных предикатов.

Пусть на некотором множестве *M* определены два предиката -P(x) и Q(x).

Определение: Конъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат P(x)ΛQ{x), который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях x ∈ M, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина», и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката P(x)ΛQ(x) является общая часть областей истинности предикатов P(x) и Q(x), то есть: $I_{P\land Q} = I_P \cap I_Q$. *Соответствующая диаграмма имеет вид:*



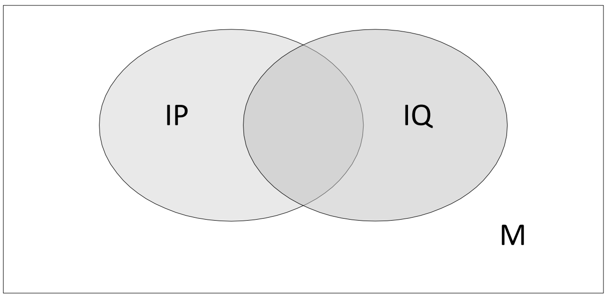
Примеры:

Для предикатов P(x): «x – четное число» и Q(x): «x кратно 3» конъюнкцией P(x)ΛQ(x) является предикат «x - четное число и x кратно 3», то есть предикат «x делится на 6» и область истинности $I_{P\land Q} = I_P \cap I_Q$ = {2, 4, 6,…,2n, …}∩ {3, 6, 9, 12,…, 3n, …}={6, 12, 18, …, 6n, …}.

Определение.Дизъюнкцией двух предикатов P(x) и Q(x) называется новый предикат P(x)VQ(x), который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях x ∈ M, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь» и принимает значение «истина»во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката P(x)VQ(x) является объединение областей истинности предикатов P(x) и Q(x), то есть : $I_{P\lor Q} = I_P \cup I_Q$.

ДИАГРАММА:

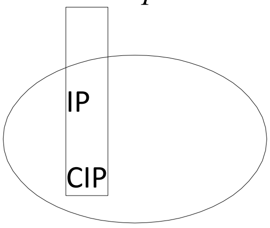


Пример: Для предикатов P(x) и Q(x) областью истинности их дизъюнкции является объединение их областей истинности:

$I_{P\lor Q} = I_P \cup I_Q$={2, 4, 6,…,2n, …}∪ {3, 6, 9, 12,…, 3n, …}={2,3,4,6,…,2n, 3n, …}.

Определение. Отрицанием предиката P(x) называется новый предикат $\overline{P(x)}$, *который принимает значение «истина» при всех значениях x ∈ M, при которых предикат P(x) принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях x ∈ M, при которых предикат P(x) принимает значение «истина».*

Из этого определения следует, что $I_{\bar{P}} = M \setminus I_P = CI_P$. *Диаграмма:*



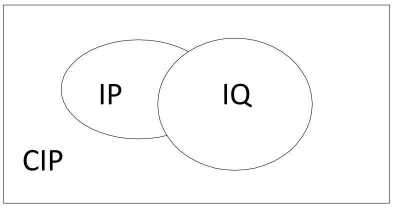
Пример: составим предикат $P(x)$: «х – нечетное число», его область истинности: $I_{\bar{P}} = CI_P = \{1,3,5,...,2n-1,...\}$.

Определение. *Импликацией предикатов P{x) и Q(x) называется новый предикат P(x)→Q(x), который является ложным при тех и только тех значениях x ∈ M, при которых одновременно P(x) принимает значение «истина», aQ(x) - значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.*

Так как при каждом фиксированном x ∈ M справедлива равносильность

$P(x) \to Q(x) \equiv \bar{P}(x) \vee Q(x)$, *то* $I_{P \to Q} = I_{\bar{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$.

Диаграмма: области истинности соответствует заштрихованная часть:



Рассмотрим несколько примеров на нахождение областей истинности предикатов.

1. На множестве М = {1,2,3,4,…,20} заданы предикаты :

А(х): «х не делится на5», В(х): «х- простое число», С(х): «х кратно 3». Найти множество истинности предиката: $\overline{A}(x)B(x) \to C(x)$.

Найдем области истинности предикатов А(х), В(х) и $C(x)$ - «х не кратно 3»:

$I_A = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,1,14,16,17,18,19\}$;

$I_B = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$;

$CI_c = \{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20\}$.

В предикате заменим импликацию : $\overline{A(x)B(x)} \vee C(x)$.

Предикату соответствует формула алгебры множеств: $C(I_A \cap I_B) \cup CI_C$.

$I_A \cap I_B = \{2,3,7,11,13,17,19\}$;

$C(I_A \cap I_B) = \{1,4,5,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$;

$C(I_A \cap I_B) \cup CI_c = \{1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$.

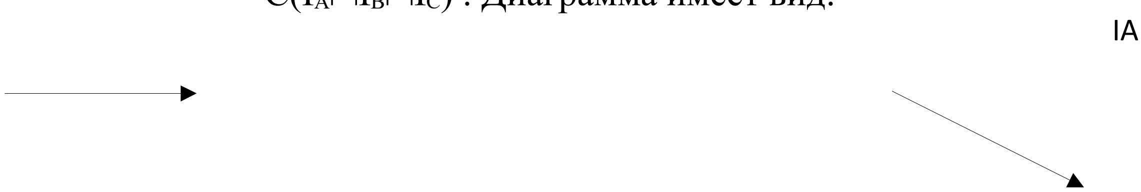
2.Изобразить на диаграмме Эйлера – Венна область истинности предиката: а) $A(x)B(x) \to \overline{D}(x)$.

Сначала выполним преобразования, рассматривая предикат как высказывание:

$$A(x)B(x) \to \overline{D}(x) \equiv \overline{A(x)C(x)} \vee \overline{D}(x) \equiv \overline{A(x)B(x)D(x)}.$$

Предикату соответствует область истинности, определяемая формулой алгебры множеств:

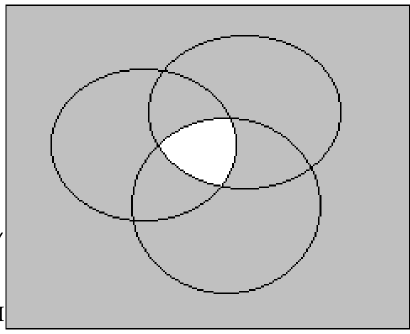
$C(I_A \cap I_B \cap I_C)$. Диаграмма имеет вид:



IC

IAIBIC

I IB



Область истинности предиката окрашена серым цветом.

$(P(x) \to Q(x)) \vee R(x)\overline{Q}(x)$.

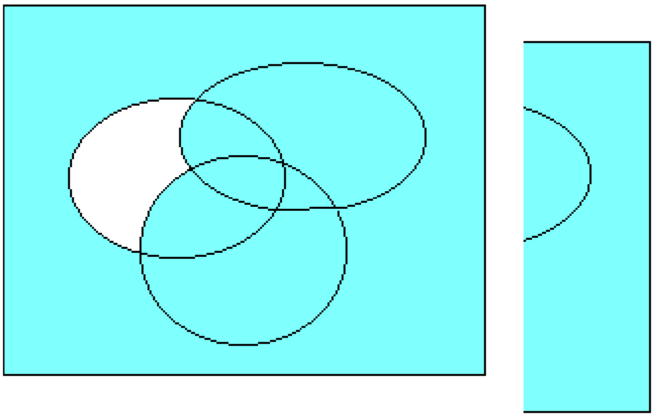
Выполним преобразования: $(P(x) \to Q(x)) \vee R(x)\overline{Q}(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x) \vee R(x)\overline{Q}(x)$.

Предикату соответствует область истинности, определяемая формулой алгебры множеств:

$CI_P \cup I_Q \cup I_R \cap CI_Q = (CI_P \cup I_Q \cup I_R) \cap (CI_P \cup I_Q \cup CI_Q)$

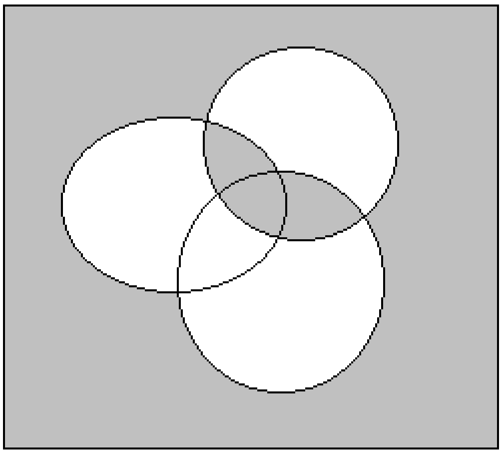
$= (CI_P \cup I_Q \cup I_R) \cap U = CI_P \cup I_Q \cup I_R$.

Соответствующа



Область истинности предиката окрашена .

3. Записать предикат, полученный в результате логических операций над предикатами P(x), Q(x), R(x), области истинности которых заштрихованы:



Так как область истинности $I = C(I_P \cup I_Q \cup I_R) \cup I_Q \cap I_R \cup I_R \cap I_P$, то предикат имеет вид

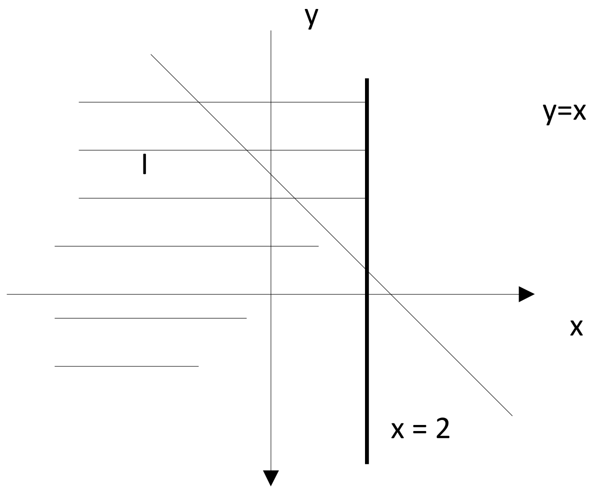
$\overline{P(x) \vee Q(x) \vee R(x)} \vee Q(x)R(x) \vee R(x)P(x) \equiv (P(x) \vee Q(x) \vee R(x)) \to R(x)(Q(x) \vee P(x))$.

4. Изобразить на координатной плоскости область истинности предиката

$a).\overline{x > 2} \wedge (x < y)$.

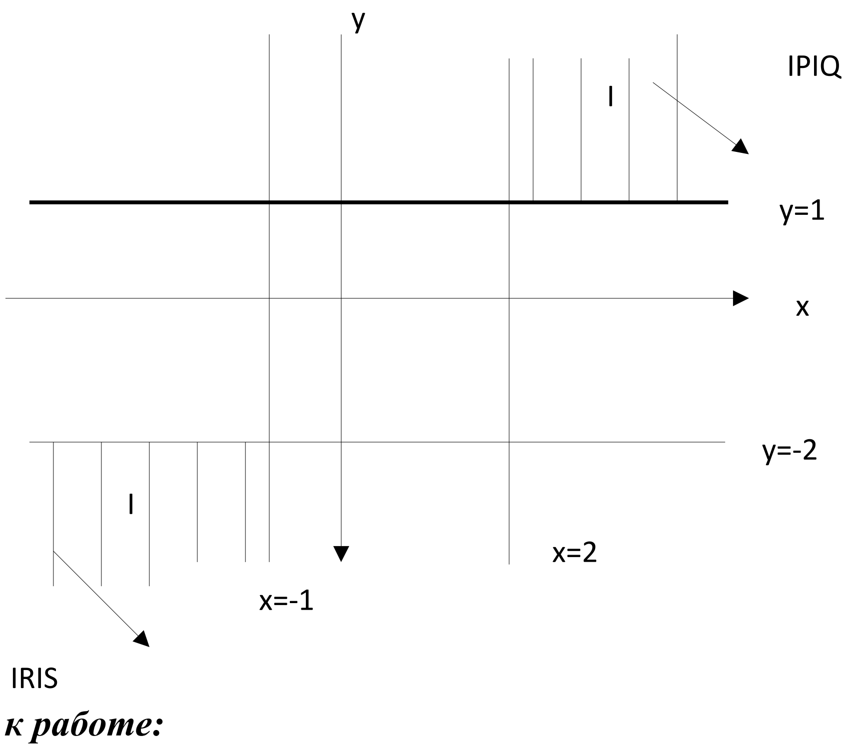
Выполним преобразования: $\overline{x > 2} \wedge (x < y) \equiv (x \le 2) \wedge (x < y)$.

Область истинности предиката x ≤ 2 - часть плоскости, расположенная левее прямой x = 2 и все точки этой прямой (изобразим ее сплошной линией). Область истинности предиката x<y – часть плоскости, расположенная выше прямой y = x без этой прямой (изобразим ее пунктирной линией). Область истинности данного предиката – пересечение описанных областей истинности:



б) ((x>2)(y≥1))V((x<-1)(y<-2)). Составим соответствующую формулу алгебры множеств, обозначив (x>2)= P(x,y), (y≥1)= Q(x,y), (x<-1)= R(x,y), (y<-2)= S(x,y):

$I = I_P \cap I_Q \cup I_R \cap I_S$. Область истинности заштрихована:



Задание к работе:

1. Для следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если область определения для одноместного M=R, для двухместного $M=R^2$:

1) $x+5=1$;
2) при $x=2$ выполняется равенство $x^2 – 1 = 0$;
3) существует такое число x, что $x^2 – 2x + 1 =0$;
4) $x^2 – 2x + 1 =0$;
5) $x+2<3x – 4$;
6) однозначное число x кратно 3;
7) $(x+2)-(3x-4)$;
8) $x^2 + y^2>0$.

2. Какие из предикатов тождественно истинны?

a. $x^2 + y^2 \geq 0$;
b. $\sin^2x + \cos^2x =1$;
c. $x^2 + 1\geq(x+1)^2$;
d. $x^2 + y^2 > 0$;
e. $(x+1)^2>x-1$.

3. Найти области истинности предикатов, если $x\in R$:

1) $\sqrt{x-6} = 2$;

2) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$;

3) $\begin{cases} x^2 - 13x + 40 \geq 0; \\ 2x^2 + x - 30 < 0. \end{cases}$

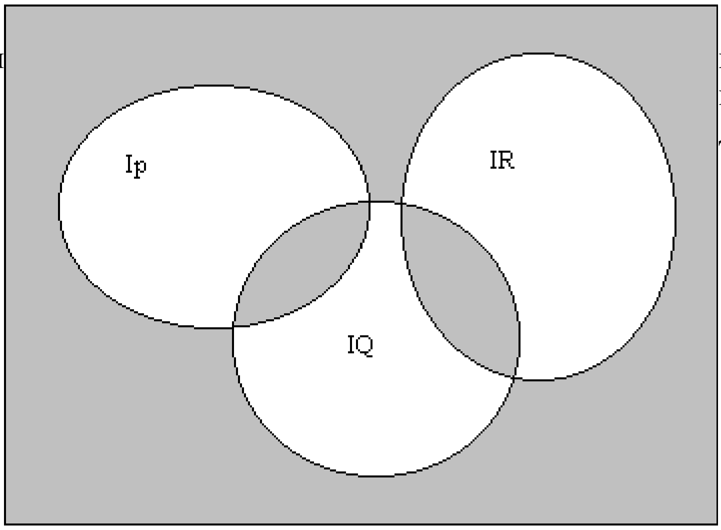
4. Изобразить на декартовой плоскости области истинности предикатов:

1) $x+y=1$;
2) $x+3y=3$;
3) $\sin x=\sin y$;
4) $(x-2)^2+(y+3)^2=0$;
5) $(x-2)^2+(y+3)^2\leq4$;
6) $((x>2)\vee(y>1))((x<-1)\vee(y<-2))$.

5.На множестве M = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} заданы предикаты A(x): «x не делится на 5», B(x): «x – четное число», C(x): «x кратно 3». Найти множество истинности предиката: $A(x) \vee B(x) \to C(x)$.

6. Изобразить на диаграмме Эйлера -Венна область истинности предиката: $(P(x) \to Q(x)) \vee R(x)\ \overline{Q}(x)$.

7. Записать предикат, полученный в результате логических операций над предикатами P(x), Q(x), R(x):



9. Будут ли предикаты равносильны, или один является следствием другого?

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$;

2) $x + y = z$; $(x + y)(x - z) = -zy$; 3) $x^3 + y^3 = 0$; $x^2 - y^2 = 0$.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Структура простого высказывания.
2. Определение одноместного предиката.
3. Область истинности одноместного предиката.
4. Определение тождественно истинного (тождественно ложного) предиката.
5. Определение двухместного предиката.
6. Определение n – местного предиката.
7. Какие предикаты являются равносильными? В каком случае предикат P(x) является следствием предиката Q(x)?
8. Перечислить логические операции над предикатами и показать области истинности на диаграммах Эйлера- Венна.

Практическая работа №9

Тема: Применение логики предикатов

Цель: научиться применятьпредикаты для решения логических задач.

Материальное обеспечение: Практическая работа.

Общие теоретические положения

1. **Запись математических предложений в виде формул логики предикатов.**

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений. Он дает возможность выражать логические связи между понятиями, записывать определения, теоремы, доказательства. Приведем ряд примеров таких записей.

1) Определение предела числовой последовательности.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \in N\left(n \ge n_0 \to \left|a_n - a\right| < \varepsilon\right)$$

Здесь использован трехместный предикат $Q(\varepsilon, n, n_0)$: $\left(n \ge n_0 \to \left|a_n - a\right| < \varepsilon\right)$.

2). Определение предела функции в точке.

$$b = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in E\left(0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - b\right| < \varepsilon\right)$$

Здесь использован трехместный предикат $P(\varepsilon, \delta, x)$: $\left(0 < \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - b\right| < \varepsilon\right)$.

3). Определение непрерывности функции в точке.

Функция *f(x),* определенная на множестве *E,* непрерывна в точке $X_0 \in E$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in E\left(\left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon\right)$. Здесь также использован трехместный предикат $P(\varepsilon, \delta, x)$.

4).Определение возрастающей функции.

Функция *f(x),* определенная на множестве *E,* возрастает на этом множестве, если

$$\forall x_1 \in E\ \forall x_2 \in E\left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right).$$

Здесь использован двухместный предикат $B(x_1, x_2)$:

$$\left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right).$$

5).Определение ограниченной функции.

Функция f(x), определенная на множестве *E,* ограничена на этом множестве, если

$$\exists M \in R_+\ \forall x \in E\left(\left|f(x)\right| \le M\right).$$

Здесь использован двухместный предикат $L(x,M)$: $(|f(x)| \le M)$.

Как известно, многие теоремы математики допускают формулировку в виде условных предложений. Например, рассмотрим следующую теорему: «Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла». Условием этой теоремы является предложение «Точка лежит на биссектрисе угла», а заключением – предложение «Точка равноудалена от сторон угла». Видим, что и условие, и заключение теоремы представляют собой предикаты, заданные на множествеR^2. Обозначая эти предикаты соответственно через *P(x)* и *Q(x),* где $x \in R^2$, теорему можем записать в виде формулы:

$$\forall x \in R^2\left(P(x) \to Q(x)\right).$$

В связи с этим, говоря о строении теоремы, можно выделить в ней три части:1) условие теоремы: предикат *P(x),* заданный на множестве R^2; 2) заключение теоремы: предикат *Q(x),* заданный на множестве R^2; 3) разъяснительная часть: в ней описывается множество объектов, о которых идет речь в теореме.

2. **Построение противоположных утверждений.**

Пусть дано некоторое математическое утверждение *A*. Ему противоположным будет утверждение $\overline{A}$.

Логика предикатов позволяет путем равносильных преобразований формулы $\overline{A}$ придать ей хорошо обозримый вид.

Так, например, определение *ограниченной функции* дается формулой: $\exists M \in R_+ \ \forall x \in E \left(|f(x)| \le M\right)$. Определение *неограниченной функции* мы получим, беря отрицание этой формулы и проводя равносильные преобразования:

$$\overline{\exists M \in R_+ \ \forall x \in E \left(|f(x)| \le M\right)} \equiv \forall M \in R_+ \overline{\forall x \in E \left(|f(x)| \le M\right)} \equiv$$

$$\equiv \forall M \in R_+ \ \exists x \in E \overline{\left(|f(x)| \le M\right)} \equiv \forall M \in R_+ \ \exists x \in E \left(|f(x)| > M\right).$$

Последняя формула дает не негативное, а положительное определение неограниченной функции.

Из приведенного определения видно, что для построения противоположного утверждения к утверждению, заданному формулой логики предикатов, содержащей все кванторы впереди, необходимо заменить все кванторы на противоположные и взять отрицание от предиката, стоящего под знаком кванторов.

Так, утверждение, что $b \ne \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ даст формула:

$$\overline{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right)} \equiv$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in E \overline{\left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\right)} \equiv$$

$$\equiv \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in E \left(0 < |x - x_0| < \delta \& |f(x) - b| \ge \varepsilon\right).$$

Особый интерес представляет построение утверждения, отрицающего справедливость некоторой теоремы: $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$.

Это будет утверждение:

$$\overline{\forall x \in E\left(P(x) \to Q(x)\right)} \equiv \exists x \in E \overline{\left(P(x) \to Q(x)\right)} \equiv \exists x \in E \left(P(x) \& \overline{Q(x)}\right).$$

Следовательно, чтобы доказать, что теорема $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$ неверна, достаточно указать такой элемент $x \in E$, для которого *P(x)* - истина, а *Q(x)* - ложь, то есть привести *контрпример.*

Используя данный прием докажем несправедливость утверждений:

a. «Если дифференцируемая функция y = f(x) имеет в точке x_0 производную, равную нулю (y'=0), то то точка x_0 – точка экстремума.» достаточно указать один пример, опровергающий утверждение теоремы. Функция $y = x^3$ в точке x=0 имеет производную $y'=3x^2 = 0$, но эта точка не является точкой экстремума. Значит, теорема не верна.

b. «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является параллелограммом.» В качестве контр примера можно привести равнобокую трапецию , у которой диагонали равны, но она не является прямоугольником.

3. **<u>Прямая, обратная и противоположная теоремы.</u>**

Рассмотрим четыре теоремы:

$$\forall x \in E\ \big(P(x) \to Q(x)\big), \quad (1)$$
$$\forall x \in E\big(Q(x) \to P(x)\big), \quad (2)$$
$$\forall x \in E\ \big(\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)\big), \quad (3)$$
$$\forall x \in E\ \big(\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)\big). \quad (4)$$

Пара теорем, у которых условие одной является заключением второй, а условие второй является заключением первой, называются *взаимно обратными* друг другу.

Так, теоремы (1) и (2) , а также (3) и (4) - взаимно обратные теоремы. При этом, если одну из них называют прямой теоремой, то вторая называется *обратной.*

Пара теорем, у которых условие и заключение одной является отрицанием соответственно условия и заключения другой, называются *взаимно противоположными.*

Так, теоремы(1) и (3), а также теоремы (2) и (4)являются взаимно противоположными теоремами.

Например, для теоремы «Если в четырехугольнике диагонали равны, то четырехугольник является прямоугольником» (1) обратной является теорема «Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали равны» (2). Для теоремы (1) противоположной является теорема «Если в четырехугольнике диагонали не равны, то четырехугольник не является прямоугольником» (3), а для теоремы (2) противоположной является теорема «Если четырехугольник не является прямоугольником, то его диагонали не равны» (4).

В рассмотренном примере теоремы (1) и (4) являются одновременно ложными, а теоремы (2) и (3) одновременно истинными. Контр примером к теореме (1) является равнобокая трапеция.

Ясно, что прямая и обратная теоремы, вообще говоря, не равносильны, то есть одна из них может быть истинной, а другая ложной. Однако легко показать, что теоремы (1) и (4), а также теоремы (2) и (3) всегда равносильны. Действительно,

$$\forall x \in E\ \big(P(x) \to Q(x)\big) \equiv \forall x \in E\ \big(\overline{P}(x) \vee Q(x)\big) \equiv$$
$$\equiv \forall x \in E\ \big(\overline{\overline{Q}}(x) \vee \overline{P}(x)\big) \equiv \forall x \in E\ \big(\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x)\big).$$

Аналогично доказывается равносильность

$$\forall x \in E\ \big(Q(x) \to P(x)\big) \equiv \forall x \in E\ \big(\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x)\big).$$

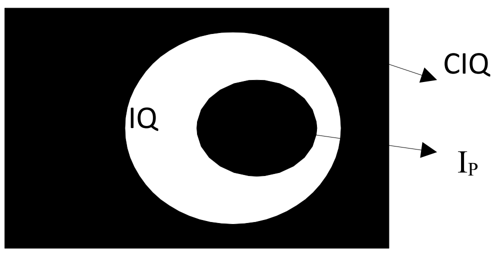
Из этих равносильностей следует, что, если доказана теорема(1), то доказана и теорема (4), а если доказана теорема (2), то доказана и теорема(3).

4. <u>Необходимые и достаточные условия.</u>

Рассмотрим теорему

$$\forall x \in E\ \big(P(x) \to Q(x)\big).$$

Множество истинности предиката $P(x) \to Q(x)$ есть множество $CI_P \cup I_Q$. Но тогда множеством ложности этого предиката будет $C(CI_P \cup I_Q) = I_P \cap CI_Q$. Последнее множество будет пустым лишь в случае, когда $I_P \subset I_Q$.



Итак, предикат $P(x) \to Q(x)$ является истинным для всех $x \in E$ в том и только в том случае, когда множество истинности предиката $P(x)$ содержится в множестве истинности предиката $Q(x)$. При этом говорят, что предикат $Q(x)$ логически следует из предиката $P(x)$, и предикат называют необходимым условием для предиката $P(x)$, а предикат $P(x)$ - достаточным условием для $Q(x)$. Так, в теореме «Если x - число натуральное, то оно целое» предикат $Q(x)$:«x - число целое» логически следует из предиката $P(x)$: «x – число натуральное», а предикат «x - число натуральное» является достаточным условием для предиката «x - число целое».

Часто встречается ситуация, при которой истинные взаимно обратные теоремы:

$$\forall x \in E\left(P(x) \to Q(x)\right)$$

$$\forall x \in E\left(Q(x) \to P(x)\right).$$

Это возможно при условии, что $I_P = I_Q$, т.к. одновременно выполняются два условия: $I_P \subset I_Q$ и $I_Q \subset I_P$.В таком случае из теоремы(1) следует, что условие $P(x)$ является достаточным для $Q(x)$, а из теоремы(2) следует, что условие $P(x)$ является необходимым для $Q(x)$.

Таким образом, если истинны теоремы (1) и (2), то условие $P(x)$ является и необходимым, и достаточным для $Q(x)$. Аналогично в этом случае условие $Q(x)$ является необходимым и достаточным для $P(x)$.

Иногда вместо логической связки «необходимо и достаточно» употребляют логическую связку «тогда и только тогда».

Так как здесь истинны высказывания(1) и (2), то истинно высказывание:
$\forall x \in E(P(x) \to Q(x)) \wedge \forall x \in E(Q(x) \to P(x)) \equiv \forall x \in E(P(x) \leftrightarrow Q(x))$.

Рассмотрим примеры.

1) Теорема «Если число l делится на 12, то оно делится на 3» истинна. Поэтому здесь делимость числа lна 12 является достаточным условием для делимости числа l на 3, а делимость числа l на 3 является необходимым условием для делимости числа l на 12. В то же время обратная теорема «Если число l делится на 3, то оно делится на 12» не верна. Поэтому делимость числа l на 3 не является достаточным условием делимости числа l на 12, а делимость числа lна 12 не является необходимым условием делимости числа lна 3.

2) Теоремы «В описанном четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой» и «Если в четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны между собой, то в этот четырехугольник можно вписать окружность» взаимно обратны. Обе они истинны, и, следовательно, здесь можно употребить логическую связку «необходимо и достаточно»:

«Для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин его противоположных сторон были равны между собой».

3) Для каждого из условий выясните, является ли оно необходимым и является ли оно достаточным, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - 2x - 8 \le 0$: а) x=0, б) $-1 \le x \le 3$, в) $x \ge -3$, г) $x > -2$, д) $-1 \le x \le 10$, е) $-2 \le x \le 4$.

Неравенство перепишем в виде $(x+2)(x-4) \le 0$, его решением являются $x \in [-2, 4]$.

а) x=0 – достаточное условие для выполнения неравенства, т.к. $0 \in [-2, 4]$.

б) $[-1, 3] \subset [-2, 4]$. Значит $-1 \le x \le 3$ – достаточное условие .

в) $[-3, +\infty) \supset [-2, 4]$, следовательно, является необходимым условием.

г) $(-2, +\infty) \not\subset [-2, 4]$ и $[-2, 4] \not\subset (2, +\infty)$, значит, не является ни необходимым, ни достаточным условием.

д) $[-1, 10] \not\subset [-2, 4]$ и $[-2, 4] \not\subset [-1, 10]$, значит, не является ни необходимым, ни достаточным условием.

е) $[-2, 4] = [-2, 4]$, следовательно, является и необходимым и достаточным условием.

5. <u>Доказательство методом от противного.</u>

Доказательство методом от противного обычно проводится по следующей схеме: предполагается, что теорема

(1)

$$\forall x \in E\ (P(x) \to Q(x))$$

не верна, то есть существует такой объект x, что условие P(x) истинно, а заключение Q(x) - ложно. Если из этих предположений путем логических рассуждений приходят к противоречивому утверждению, то делают вывод о том, что исходное предположение не верно, и верна теорема(1).Покажем, что такой подход дает доказательство истинности теоремы(1).

Действительно, предположение о том, что теорема (1) не справедлива, означает истинность формулы $\overline{\forall x \in E\ (P(x) \to Q(x))}$. Противоречивое утверждение, которое получается из допущенного предположения, есть конъюнкция $C\&\overline{C}$, где C — некоторое высказывание. Таким образом, схема доказательства от противного сводится к доказательству истинности формулы $\overline{\forall x \in E\ (P(x) \to Q(x))} \to C\&\overline{C}$. Легко видеть, что эта формула равносильна формуле(1). Действительно,

$$\overline{\forall x \in E\ (P(x) \to Q(x))} \to C\&\overline{C} \equiv \overline{\overline{\forall x \in E\ (P(x) \to Q(x))}} \vee C\&\overline{C} \equiv$$

$$\equiv \forall x \in E\ (P(x) \to Q(x)).$$

Задание к работе:

1. Доказать несправедливость утверждений:

а) «Если дифференцируемая функция y= f(x) имеет в точке x_0 вторую производную, равную нулю, то точка x_0 – точка перегиба графика функции».

б) «Если числовая последовательность ограничена, то она имеет предел».

в) «Если функция непрерывна в точке x_0, то она имеет производную в этой точке».

2. Для каждого из условий выясните, является ли оно необходимым и является ли оно достаточным, чтобы выполнялось неравенство $x^2 – 3x – 18 \le 0$: а) x=1, б) $-2\le x \le 5$, в) $x\ge -3$, г) $x> -3$, д) $-1\le x \le 10$, е) $–3 \le x \le 6$.

3. Запишите на языке логики предикатов определение: «Функция f(x) называется ограниченной на множестве M, если существует такое неотрицательное число L, что для всех $x \in M$, справедливо неравенство $|f(x)|\le M$.»

4. В предложениях вместо многоточия поставьте слова «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо», «не необходимо и недостаточно», «необходимо и достаточно»:

а) Для того, чтобы четырехугольник был прямоугольным…, чтобы длины его диагоналей были равны;

б) Для того, чтобы x2 – 5x + 6 = 0…, чтобы x=3;

в) Для того, чтобы сумма четного числа натуральных чисел была четным числом, чтобы каждое слагаемое было четным;

г) Для того, чтобы окружность можно было вписать в четырехугольник, чтобы сумма длин суммы длин его противоположных сторон были равны;

д) Для того, чтобы множество было счетным, чтобы его элементы можно было записать в виде занумерованной последовательности;

е) Для того, чтобы числовая последовательность имела предел, чтобы она была ограниченной.

5.Сформулируйте:

а) Необходимый, но недостаточный признак параллелограмма;

б) Необходимый и достаточный признак параллелограмма;

в) Достаточное, но не необходимое условие, чтобы уравнение sinx = a имело решение.

г) Необходимое, но не достаточное условие, чтобы уравнение sinx = а имело решение.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Записать в виде формулы логики предикатов определение: а) непрерывности функции в точке; б) предела числовой последовательности; в) ограниченной функции.

2. Как выполняется построение противоположного утверждения к утверждению, заданному в виде формулы логики предикатов? Постройте противоположные утверждения для утверждений из первого пункта контрольных вопросов.

3. Приведите четыре вида теорем и объясните смысл каждой из них.

4. Какие из теорем являются равносильными?

5. Каким должно быть отношение между областями истинности предикатов P(x) и Q(x), чтобы теорема $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$ была истинной? Какой в этом случае из предикатов необходимое и какой достаточное условие?

6. Какое отношение должно быть между областями истинности предикатов P(x) и Q(x), чтобы для теоремы $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$ была справедлива и обратная теорема? Какой теоремой можно заменить в этом случае прямую и обратную?

7. Докажите равносильность формул $\forall x \in E(P(x) \to Q(x))$ и $\overline{\forall x \in E(P(x) \to Q(x))} \to C\overline{C}$.

Практическая работа №10

Тема: Составление алгоритмов. Различные подходы к формализации понятия алгоритма.

Цель: научиться составлять алгоритмы, используя различные подходы к формализации.

Материальное обеспечение:Практическая работа.

Общие теоретические положения

Понятие алгоритма, можно назвать понятием алгоритма в интуитивном смысле. Оно имеет нечеткий, неформальный характер, ссылается на некоторые точно не определенные, но интуитивно понятные вещи. Например, при определении и обсуждении свойств алгоритма мы исходили из возможностей некоторого исполнителя алгоритма. Его наличие предполагалось, но ничего определенного о нем не было известно. На основе обобщения свойств алгоритмов различной природы и имеют прикладной характер. Этих свойств достаточно для практического программирования, для создания обширного круга программ для компьютеров, станков с ЧПУ, промышленных роботов и т.д. Однако, как фундаментальное научное понятие алгоритм требует более обстоятельного изучения. Оно невозможно без уточнения понятия «алгоритм», более строгого его описания или, как еще говорят, без его **формализации.**

Известно несколько подходов к формализации понятия «алгоритм»:

• теория конечных и бесконечных автоматов;

• теория вычислимых (рекурсивных) функций;

• λ-исчисление Черча.

Все эти возникшие исторически независимо друг от друга подходы оказались впоследствии эквивалентными. Главная цель формализации понятия алгоритма такова: подойти к решению проблемы алгоритмической разрешимости различных математических задач, т.е. ответить на вопрос, может ли быть построен алгоритм, приводящий к решению задачи. Мы рассмотрим постановку этой проблемы и некоторые результаты теории алгоритмической разрешимости задач, но вначале обсудим формализацию понятия алгоритма в теории автоматов на примере машин Поста, Тьюринга, а также нормальных алгоритмов Маркова, а затем - основы теории рекурсивных функций. Идеи λ-исчислений Черча реализованы в языке программирования LISP.

Вместе с тем, формально определенный любым из известных способов алгоритм не может в практическом программировании заменить то, что мы называли алгоритмами. Основная причина состоит в том, что формальное определение резко сужает круг рассматриваемых задач, делая многие практически важные задачи недоступными для рассмотрения.

Этапы решения задачи на ЭВМ

Работа по решению любой задачи с использованием компьютера делится на следующие этапы:

1. Постановка задачи.
2. Формализация задачи.
3. Построение алгоритма.
4. Составление программы на языке программирования.
5. Отладка и тестирование программы.
6. Проведение расчетов и анализ полученных результатов.

Часто эту последовательность называют технологической цепочкой решения задачи на ЭВМ. Непосредственно к программированию в этом списке относятся пункты 3, 4, 5.

На этапе постановки задачи должно быть четко сформулировано, что дано и что требуется найти. Здесь очень важно определить полный набор исходных данных, необходимых для получения решения.

Второй этап — формализация задачи. Здесь чаще всего задача переводится на язык математических формул, уравнений, отношений. Если решение требует математического описания какого-то реального объекта, явления или процесса, то формализация равносильна получению соответствующей математической модели.

Третий этап — построение алгоритма. Опытные программисты часто сразу пишут программы на языках, не прибегая к каким-либо специальным способам описания алгоритмов (блок-схемам, псевдокодам). Однако в учебных целях полезно использовать эти средства, а затем переводить полученный алгоритм на язык программирования .

Первые три этапа предусматривают работу без компьютера. Дальше следует собственно программирование на определенном языке, в определенной системе программирования.

Последний (шестой) этап — это использование уже разработанной программы в практических целях.

Таким образом, программист должен обладать следующими знаниями и навыками:

1. уметь строить алгоритмы;
2. знать языки программирования;
3. уметь работать в соответствующей системе программирования.

Основой программистской грамотности является развитое алгоритмическое мышление.

Понятие алгоритма. Одним из фундаментальных понятий в информатике является понятие алгоритма. Происхождение самого термина «алгоритм» связано с математикой. Это слово происходит от Algorithmi — латинского написания имени Мухаммеда аль-Хорезми (787 — 850), выдающегося математика средневекового Востока. В XII в. был выполнен латинский перевод его математического трактата, из которого европейцы узнали о десятичной позиционной системе счисления и правилах арифметики многозначных чисел. Именно эти правила в то время называли алгоритмами. Сложение, вычитание, умножение столбиком, деление уголком многозначных чисел — вот первые алгоритмы в математике.

Правила алгебраических преобразований, способы вычислений корней уравнений также можно отнести к математическим алгоритмам.

В наше время понятие алгоритма трактуется шире. Алгоритм — это последовательность команд управления каким-либо исполнителем. В школьном курсе информатики с понятием алгоритма, с методами построения алгоритмов ученики знакомятся на примерах учебных исполнителей: Робота, Черепахи, Чертежника и т.д. Эти исполнители ничего не вычисляют. Они создают рисунки на экране, перемещаются в лабиринтах, перетаскивают предметы с места на место. Таких исполнителей принято называть исполнителями, работающими в обстановке.

Задание к работе:

Задание 1. Даны x, y. Составить программу вычисления значения выражения:

a) $\frac{|x| - |y|}{1 + |xy|}$ b) $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{xy}$ c) $\frac{x - y}{|x| - |y|}$ d) $\frac{\sqrt{|x| + |y|}}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Задание 2. Составить программу для решения следующей задачи:

a) Дана длина ребра куба. Найти объем куба и площадь его боковой поверхности.

b) Известна длина окружности. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

c) Вычислить высоту треугольника, опущенную на сторону *a*, по известным значениям длин его сторон *a, b, c*.

d) По данным сторонам прямоугольника вычислить его периметр, площадь и длину диагонали.

Задание 3. Вывести значение *true*, если приведенное высказывание для предложенных исходных данных является истинным, и значение *false* в противном случае (все числа, для которых не указано иное, являются действительными):

a) данное число *x* принадлежит отрезку [-*a, a*];

b) данное число *x* не принадлежит интервалу (*a, b*);

c) данное целое число *x* является нечетным;

d) данное число *x* является корнем уравнения: $ax^2+bx+c=0$;

Дополнительные задания

1. Ученик начал решать задачи данного урока программирования, когда электронные часы показывали h_1 часов и min_1 минут, а закончил, когда было h_2 часов и min_2 минут. Составьте программу, позволяющую определить, сколько времени (в часах и минутах) ученик решал эти задачи.

2. Дано действительное число а. Не пользуясь никакими другими операциями, кроме умножения, получить: а) a^4 за две операции; б) a^6 за три операции; в) a^7 за четыре операции; г) a^8 за три операции.

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Каковы назначение и возможности системы программирования?
2. Как запустить программу на трансляцию и выполнение?
3. Как обозначается начало и конец программы?
4. Из каких разделов состоит программа на языке Паскаль?
5. Как в языке Паскаль осуществляется вывод на экран?
6. Для чего предназначен оператор присваивания?

5. Как вывести на экран значение переменной?