МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для реализации программы дисциплины

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

для специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование

Базовая подготовка

2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических работ по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики разработаны в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины и предназначены для приобретения необходимых практических навыков и закрепления теоретических знаний, полученных обучающимися при изучении учебной дисциплины, обобщения и систематизации знаний перед экзаменом.

Методические указания предназначены для обучающихся специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Учебная дисциплина ЕН.01 Элементы высшей математики относится к математическому и общему естественнонаучному циклу, изучается на 3 курсе и при ее изучении отводится значительное место выполнению практических работ.

Цель и планируемые результаты освоения учебной дисциплины:

Код ПК, ОК	Умения	Знания
ОК 01, ОК 05	Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости Применять методы дифференциального и интегрального исчисления Решать дифференциальные уравнения Пользоваться понятиями теории комплексных чисел	Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии Основы дифференциального и интегрального исчисления Основы теории комплексных чисел

Выполнение практических работа направлены на формирование общих компетенций:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.

ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.

Рабочая программа учебной дисциплины предусматривает проведение практических работ в объеме 14 часов.

Практическое занятие № 1.

Тема: Основы линейной алгебры.

Цель работы: научиться:

- определять размер и вид матрицы, выполнять сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, транспонирование матрицы, выполнять умножение матриц, возведение матрицы в степень.
- научиться вычислять определители матриц второго и третьего порядка и применять свойства определителей.

Порядок проведения работы

1. Изучить теоретический материал по конспекту в тетради или по учебникам (см. справочную литературу)
2. Выполнить работу по вариантам, пользуясь примерами решения упражнений в тетради.
3. Записать ответы к решениям упражнений.

Основные понятия и определения

Матрицей называют прямоугольную таблицу, заполненную числами. Важнейшие характеристики матрицы – число строк и число столбцов. Если у матрицы одинаковое число строк и столбцов, ее называют квадратной. Обозначают матрицы большими латинскими буквами.

Сами числа называют элементами матрицы и характеризуют их положением в матрице, задавая номер строки и номер столбца и записывая их в виде двойного индекса, причем вначале записывают номер строки, а затем столбца. Например, a_{14} есть элемент матрицы, стоящий в первой строке и четвертом столбце, a_{32} стоит в третьей строке и втором столбце.

Главной диагональю квадратной матрицы называют элементы, имеющие одинаковые индексы, то есть те элементы, у которых номер строки совпадает с номером столбца. Побочная диагональ идет «перпендикулярно» главной диагонали.

Особую важность представляют собой так называемые единичные матрицы. Это квадратные матрицы, у которых на главной диагонали стоят 1, а все остальные числа равны 0. Обозначают единичные матрицы Е. Матрицы называют равными, если у них равны число строк, число столбцов, и все элементы, имеющие одинаковые индексы, равны. Матрица называется нулевой, если все ее элементы равны 0. Обозначается нулевая матрица О.

Простейшие действия с матрицами

1. Умножение матрицы на число. Для этого необходимо умножить каждый элемент матрицы на данное число.

2. Сложение матриц. Складывать можно только матрицы одинакового размера, то есть имеющие одинаковое число строк и одинаковое число столбцов. При сложении матриц соответствующие их элементы складываются.

3. Транспонирование матрицы. При транспонировании у матрицы строки становятся столбцами и наоборот. Полученная матрица называется транспонированной и обозначается A^T.

4. Умножение матриц. Для произведения матриц существуют следующие свойства:

- Умножать можно матрицы, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.
- В результате получится матрица, число строк которой равно числу строк первой матрицы, а число столбцов равно числу столбцов второй матрицы.
- От перестановки местами матриц в произведении результат меняется. Более того, если можно посчитать произведение A·B, это совсем не означает, что можно посчитать произведение B·A.
- Пусть C = A·B. Для определения элемента матрицы C, стоящего в *i*-той строке и *k*-том столбце необходимо взять *i*-тую строку первой умножаемой матрицы и *k*-тый столбец второй. Далее поочередно брать элементы этих строки и столбца и умножать их. Берем первый элемент из строки первой матрицы и умножаем на первый элемент столбца второй матрицы. Далее берем второй элемент строки первой матрицы и умножаем на второй элемент столбца второй матрицы и так далее. А потом все эти произведения надо сложить.

5. Определитель матрицы

Определителем (детерминантом) квадратной матрицы А называется число, которое обозначается $\det A$, реже $|A|$ или просто Δ, и вычисляется определённым образом. Для матрицы размера 1x1 определителем является сам единственный элемент матрицы. Для матрицы размера 2x2 определитель находят по следующей формуле: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Миноры и алгебраические дополнения

Рассмотрим матрицу А. Выберем в ней s строк и s столбцов. Составим квадратную матрицу из элементов, стоящих на пересечении полученных строк и столбцов. Минором матрицы А порядка s называют определитель полученной матрицы.

Рассмотрим квадратную матрицу А. Выберем в ней s строк и s столбцов. Дополнительным минором к минору порядка s называют определитель, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания данных строк и столбцов.

Алгебраическим дополнением к элементу a_{ik} квадратной матрицы А называют дополнительный минор к этому элементу, умноженный на $(-1)^{i+k}$, где $i+k$ есть сумма номеров строки и столбца элемента a_{ik}. Обозначают алгебраическое дополнение A_{ik}.

Вычисление определителя матрицы через алгебраические дополнения

Рассмотрим квадратную матрицу А. Для вычисления ее определителя необходимо выбрать любую ее строку или столбец и найти произведения каждого элемента этой строки или столбца на алгебраическое дополнение к нему. А дальше надо просуммировать все эти произведения.

Когда будете считать алгебраические дополнения, не забывайте про множитель $(-1)^{i+k}$. Чтобы счет был более простым, выбирайте ту строку или столбец матрицы, который содержит наибольшее число нулей.

Расчет алгебраического дополнения может сводиться к расчету определителя размером более чем 2x2. В этом случае такой расчет также нужно проводить через алгебраические дополнения, и так далее до тех пор, пока алгебраические дополнения, которые нужно будет считать, не станут размером 2x2, после чего воспользоваться формулой выше.

Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу А. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице А, если их произведения равны единичной матрице. Обратная матрица существует только для квадратных матриц. Обратная матрица существует, только если матрица А невырождена, то есть ее определитель не равен нулю. В противном случае обратную матрицу посчитать невозможно. Для построения обратной матрицы необходимо:

1. Найти определитель матрицы.
2. Найти алгебраическое дополнение для каждого элемента матрицы.
3. Построить матрицу из алгебраических дополнений и обязательно транспонировать ее. Часто про транспонирование забывают.
4. Разделить полученную матрицу на определитель исходной матрицы.

Таким образом, в случае, если матрица А имеет размер 3x3, обратная к ней матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1	***Вариант 2***
№ 1. Выполнить действия:	
$3\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 8 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -10 & 54 & 22 \\ 0 & -6 & 18 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & -9 & -3 \\ 6 & -27 & 12 \\ -15 & 18 & 0 \end{pmatrix} \pm 4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$
№ 2. Найти произведение матриц:	

$\begin{pmatrix} a & -a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & a & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a & 1 & a \\ a & 1 & -a \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -b & b & -b \\ 1 & 1 & 1 \\ b & -b & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 1 & -b \\ -b & 1 & b \\ b & 1 & -b \end{pmatrix}$
№3. Вычислить матрицу D = $(AB)^T - C^2$, где	
$A = ¿ (3 \quad 4 \quad 2 ¿) ¿ ¿ ¿$ ¿	$A = ¿ (2 \quad 1 \quad 0 ¿) ¿ ¿ ¿$ ¿
№ 4. Вычислить определитель 3-го порядка, используя определение	
$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$
№ 5. Вычислить определитель, используя его свойства	
$\begin{vmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 18 & 4 & -3 \\ 54 & -2 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 20 & 2 & 5 \\ -40 & 2 & 5 \\ -60 & 2 & 10 \end{vmatrix}$
№ 6. Какой из определителей больше и во сколько раз?	
$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & -11 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ *или* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 28 & -44 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$	$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & -10 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ *или* $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & -15 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}$

Практическое занятие № 2.

Тема: Решение систем линейных уравнений

Цель работы:

- научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера, Гаусса и обратной матрицы;
- закрепить навык вычисления определителя матрицы, обратной матрицы, произведения двух матриц;
- научиться приводить матрицу к треугольному виду, используя свойства матриц;
- научиться производить проверку решения системы линейных уравнений.

Порядок проведения работы

1. Изучить теоретический материал по конспекту в тетради или по учебнику.
2. Выполнить работу по вариантам, пользуясь примерами решения упражнений в тетради.

Основные понятия и определения

Пример 1. Дана система линейных алгебраических уравнений:

$$x+5y-z=3¿\;2x+4y-3z=2¿¿¿¿$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее: *а)* по формулам Крамера; *б)* методом Гаусса; *в)* с помощью обратной матрицы. Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера - Капелли.

Решение. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы данной системы и ранг расширенной матрицы $$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

Для этого умножим первую строку матрицы B на –2 и сложим со второй, затем умножим первую строку на –3 и сложим с третьей, получим

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 0 & -16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & -6 & -4\\ 0 & 0 & -16 & -16\end{array}\right).$$

Следовательно, *rang A* = *rang B* = 3 (числу неизвестных), исходная система имеет единственное решение.

а) Находим решение системы по формулам Крамера

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$ где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}=-16;\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ -7 & -1 & -3\end{vmatrix}=64;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -3\\ 3 & -7 & -3\end{vmatrix}=-16;\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 3 & -1 & -7\end{vmatrix}=32.$$

$$x=\frac{64}{-16}=-4;\quad y=\frac{-16}{-16}=1;\quad z=\frac{32}{-16}=-2.$$

б) Метод Гаусса. Составим расширенную матрицу и проведем необходимые элементарные преобразования. Элементы первой строки умножим на –2 и прибавим к соответствующим элементам 2-ой строки, затем элементы первой строки умножим на –3 и прибавим к соответствующим элементам третьей строки.

$$\begin{array}{ccc} x & y & z\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccc} x & y & z\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccc} x & z & y\end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 0 & -16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 3\\ 0 & -1 & -6 & -4\\ 0 & 0 & -16 & -16\end{array}\right).$$

Последней матрицей соответствует система, эквивалентная исходной:

$$x-z+5y=3 \quad -z-6y=-4$$

Из этой системы, двигаясь снизу вверх, последовательно находим:

$$y=1,\quad z=-2,\quad x=-4.$$

в) Матричный метод. Так как *det A* = -16 ≠0, то матрица A невырожденная, существует обратная матрица A^{-1}, определяемая по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $A_{i\,j}\ \left(i=\overline{1,3},\quad j=\overline{1,3}\right)$ являются алгебраическими дополнениями соответствующих элементов матрицы *A*.

Введем в рассмотрение матрицы столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Тогда данную систему можно записать в матричной форме:, $A\cdot X=B$ отсюда находим $X=A^{-1}\cdot B$ - решение системы в матричной форме.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-15; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-14; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=16;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=0; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=16;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-11; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-6;$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение системы:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=-\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

таким образом,

$$x=-4,\quad y=1,\quad z=-2.$$

Задание. Решить систему линейных уравнений методом Крамера, Гаусса и обратной матрицы и выполнить проверку решения.

(№ задания соответствует порядковому номеру студента в журнале)

1. $\{3x+2y-4z=8,$ ¿ $\{2x+4y-5z=11,$ ¿¿¿¿	**2.** $\{3x-3y+2z=2,$ ¿ $\{4x-5y+2z=1,$ ¿¿¿¿	**3.** $\{2x-4y+3z=1,$ ¿ $\{3x-y+5z=2,$ ¿¿¿¿

4. |x+ y+ z=4,¿|x+2y+3z=7,¿¿¿¿	**5.** |x- y+3z=-4,¿|2x+ y-2z=5,¿¿¿¿	**6.** |4x- y+2z=8,¿|3x-2y+5z=14,¿¿¿¿
7. |2x+ y-2z=4,¿|3x- y-5z=-5,¿¿¿¿	**8.** |5x-3y+4z=7,¿|2x-2y+3z=5,¿¿¿¿	**9.** |x+2y-3z=0,¿|2x- y+4z=5,¿¿¿¿
10. |5x+3y+ z=7,¿|4x-2y-3z=3,¿¿¿¿	**11.** |2x-5y+3z=4,¿|4x+3y-5z=2,¿¿¿¿	**12.** |3x+2y-4z=-5,¿|2x+4y-5z=-5,¿¿¿¿
13. |5x-3y+2z=19,¿|4x+5y-3z=31,¿¿¿¿	**14.** |2x+ y-2z=1,¿|x- y+3z=4,¿¿¿¿	**15.** |2x+3y- z=2,¿|2x- y+2z=5,¿¿¿¿

Практическое занятие № 3

Тема: Операции над векторами, заданными в координатной форме. Произведение векторов: скалярное векторное, смешанное

Цель занятия: Научиться вычислять модуль вектора и находить скалярное произведение векторов, заданных своими координатами.

Оснащение рабочего места: Инструкционно – технологическая карта, тетрадь, ручка.

Основные правила ТБ на рабочем месте:

- ✓ соблюдение правил противопожарной безопасности;
- ✓ соблюдение правил электробезопасности;
- ✓ организация рабочего места для создания комфортных зрительных условий.

Контрольные вопросы:

1. Что называется вектором?
2. Операции над векторами, их свойства.
3. Модуль вектора.
4. Определение скалярного произведения векторов.
5. Угол между векторами.
6. Определение скалярного произведения векторов, заданных своими координатами

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\, u\, \vec{b}$, если $|\vec{a}|$=2, $|\vec{b}|$=3 и угол между векторами $\vec{a}\, u\, \vec{b}$ равен: 1) 45^0; 2) 0^0; 3) 135^0; 4) 90^0; 5) 180^0.

2. Угол между векторами $\vec{a}\, u\, \vec{b}$ равен 150^0. Знаяя, что $|\vec{a}|$=2, $|\vec{b}|$=3, вычислить 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) ($\vec{a}-2\vec{b}$¿($\vec{a}+2\vec{b}$¿; 3) $(\vec{a}-2\vec{b})^2$; 4) $(7\vec{a}+\vec{b})^2$; 5¿$(\vec{a}+2\vec{b})$¿^{2}.

3. Даны векторы $a=(2;3;-1)$, $\vec{b}$ = (0;1;4), $\vec{c}$ (1;0;-3). Определить координаты вектора: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}+2\vec{b}$; 3) $\vec{a}-2\vec{b}$; 4) $7\vec{a}+\vec{b}$; 5) $7\vec{a}-\vec{b}$; 6) $\vec{c}+\vec{b}$; 7) $\vec{c}+2\vec{b}$; 8) $\vec{c}-2\vec{b}$; 9) $7\vec{c}+\vec{b}$; 10) $7\vec{c}-\vec{b}$.

4. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$и $\vec{b}$, если : 1) $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}$ = (0;1;4); 2) $\vec{a}=(0;3;1)$, $\vec{b}$ = (0; 2; -4); 3¿ $\vec{a}=(-1;3;-1)$, $\vec{b}$ = (-2;0;4); 4) $\vec{a}=(2;3;0)$, $\vec{b}$ = (1;1;-3); 5¿ $\vec{a}=(4;1;-1)$, $\vec{b}$ = (-1;1;4).

5. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}.\vec{b}$ и $\vec{c}$, если: 1) $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}$ = (0;1;4), $\vec{c}$ (1;0;-3); 2) $\vec{a}=(0;3;1)$, $\vec{b}$ = (0; 2; -4), $\vec{c}(1;0;-3)$; 3¿ $\vec{a}=(-1;3;-1)$, $\vec{b}$ = (-2;0;4); $\vec{c}$ (1;0;-3); 4) $\vec{a}=(2;3;0)$, $\vec{b}$ = (1;1;-3); $\vec{c}(1;0;-3)$; 5¿ $\vec{a}=(4;1;-1)$, $\vec{b}$ = (-1;1;4), $\vec{c}$ (1;0;-3);

6. Найти угол между векторами: $\vec{a}$= 2i + 2j; $\vec{b}$ = 2j + 2k.

7. Сделать вывод.

Практическое занятие № 4.

Тема: Составление уравнений прямых на плоскости.
Цель работы:

- научиться составлять различные уравнения прямых;
- научиться строить прямые на плоскости.

Порядок проведения работы

1. Изучить теоретический материал по конспекту в тетради или по учебнику (стр. 286-294).
2. Выполнить работу по вариантам, пользуясь примерами решения упражнений в тетради.
3. Записать ответы к решениям упражнений.

Основные понятия и определения

Уравнение прямой.

Прямая (прямая линия) - это бесконечная линия, по которой проходит кратчайший путь между любыми двумя её точками.

Уравнение прямой на плоскости

Любую прямую на плоскости можно задать общим уравнением прямой первой степени вида

$$A x + B y + C = 0$$

где A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Общее уравнение прямой при B≠0 можно привести к виду

y = k x + b, где k=-A/B, b=-C/B

где k - угловой коэффициент равный тангенсу угла, образованного данной прямой и положительным направлением оси OX

Уравнение прямой в отрезках на осях

Если прямая пересекает оси OX и OY в точках с координатами (a, 0) и (0, b), то она может быть найдена используя формулу уравнения прямой в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Уравнение прямой, проходящей через две различные точки на плоскости

Если прямая проходит через две точки A(x_1, y_1) и B(x_2, y_2), такие что $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ то уравнение прямой можно найти, используя следующую формулу

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Параметрическое уравнение прямой на плоскости

Параметрические уравнения прямой могут быть записаны следующим образом

$$\begin{cases} \mathbf{x = l\ t + x_0} \\ \mathbf{y = m\ t + y_0} \end{cases}$$

где (x_0, y_0) - координаты точки лежащей на прямой, $\{l, m\}$ - координаты направляющего вектора прямой.

Каноническое уравнение прямой на плоскости

Если известны координаты точки $A(x_0, y_0)$ лежащей на прямой и направляющего вектора $n = \{l; m\}$, то уравнение прямой можно записать в каноническом виде, используя следующую формулу

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Пример. Найти уравнение прямой проходящей через две точки A(1, 7) и B(2,3).

Решение. Воспользуемся формулой для уравнения прямой проходящей через две точки

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 7}{3 - 7}$$

Из этого уравнения выразим y через x

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 7}{-4}$$

$$y - 7 = -4(x - 1)$$

$$y = -4x + 11$$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.	***Вариант 2.***
№ 1. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 и перпендикулярной данному вектору $\overrightarrow{AB}$:	
$M_0(-2;-3)$, $A(-5;2)$, $B(-1;4)$	$M_0(2;2)$, $A(1;-3)$, $B(6;-5)$
№ 2. Преобразуйте уравнения следующих прямых к уравнениям в отрезках на осях:	
$2x+3y+1=0$.	$2x+3y-6=0$
№ 3. Составьте уравнения прямой, проходящей через точку *M* и имеющей угловой коэффициент *k*:	
$M(-1;-1)$, $k=1$	$M(2;0)$, $k=-2$
№ 4. Составьте уравнения сторон треугольника, вершинами которого служат точки	
$A(-3;-2)$, $B(1;5)$, $C(8;-4)$	$A(-1;-3)$, $B(3;5)$, $C(4;0)$
№ 5. Составить уравнение прямой,	
проходящей через точку (4; - 5) и образующей с осью *Ox* угол *arctg* (-3).	проходящей через точку (2; 3) и образующей с осью *Ox* угол 45^0.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Дополнительное задание.
Треугольник задан вершинами: $A(-5;-2),\ B(7;6),\ C(5;-4)$.
Найдите:
1. уравнение стороны AB;
2. уравнение медианы AM;
3. уравнение высоты CH;
4. углы B и C.</td></tr>
<tr><td align="center">Вариант 3.</td><td align="center">Вариант 4</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">№ 1. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0
и перпендикулярной данному вектору $\vec{n}$:</td></tr>
<tr><td align="center">$M_0(-2;-3)$, $\vec{n}=(4;-5)$</td><td align="center">$M_0(1;-1),\ \vec{n}=(-3;4)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">№ 2. Составить уравнение прямой в отрезках на осях,
если она пересекает оси координат в точках:</td></tr>
<tr><td align="center">$A(-2;0),\ B(0;3)$.</td><td align="center">$A(3;0),\ B(0;-4)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">№ 3. Составьте уравнения прямой, проходящей через начало координат и точку:</td></tr>
<tr><td align="center">$A(3;-6)$.</td><td align="center">$A(-1;-5)$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">№ 4. Треугольник задан вершинами:</td></tr>
<tr><td align="center">$A(-3;4),\ B(-4;-3),\ C(8;1)$.
Составить уравнение медианы AD.</td><td align="center">$A(2;5),\ B(-6;-4),\ C(6;-3)$.
Составить уравнение медианы BD.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">№ 5. Составить уравнение прямой,</td></tr>
<tr><td align="center">проходящей через точку (-1; -1) и имеющей угловой коэффициент $k = 1$.</td><td align="center">проходящей через точку (2; 0) и имеющей угловой коэффициент $k = -2$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Дополнительное задание.
Треугольник задан вершинами: $A(-7;3),\ B(2;-1),\ C(-1;-5)$.
Найдите:
1. уравнение прямой AM, параллельной стороне BC;
2. уравнение медианы AD;
3. уравнение высоты BF;
4. уравнение биссектрисы CN.</td></tr>
</table>

Практическое занятие № 5.

Тема: Составление уравнений кривых второго порядка, построение

Цель работы:

- научиться составлять уравнения окружности, эллипса, параболы и гиперболы;
- закрепить навык построения кривых второго порядка на плоскости.

Порядок проведения работы

1. Изучить теоретический материал по конспекту в тетради).
2. Выполнить работу по вариантам, пользуясь примерами решения упражнений в тетради.
3. Записать ответы к решениям упражнений.

Основные понятия и определения

Окру́жность — это фигура, которая состоит из всех точек на плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется центром **окружности**. **Окружность** нулевого радиуса (вырожденная **окружность**) является точкой, иногда этот случай исключается из определения.

Общее уравнение окружности записывается как:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

или

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

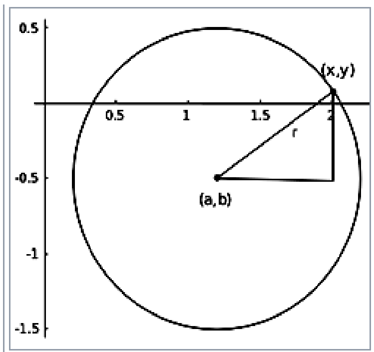
где

$$2x_0 = -A,\ 2y_0 = -B,\ 2R = \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Точка (x_0, y_0) — центр окружности, R — её радиус.

Уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$



Окружность радиуса $r = 1$, центр $(a, b) = (1.2, -0.5)$

Окружность также можно описать с помощью параметрического уравнения:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos\varphi \\ y = y_0 + R\sin\varphi \end{cases},\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Пример 3

Построить график линии, заданной уравнением $x^2 - 2y + y^2 - 3 = 0$

Пример 3: ***Решение****: выделим полный квадрат:*

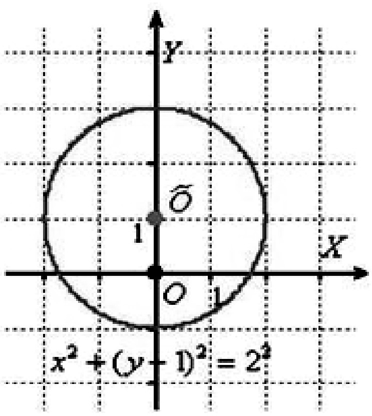
$x^2 - 2y + y^2 - 3 = 0$

$x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 - 3 = 0$

$x^2 + (y - 1)^2 = 4$

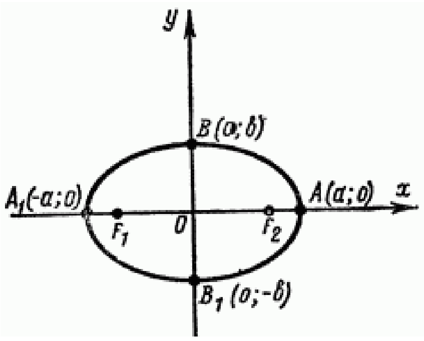
$x^2 + (y - 1)^2 = 2^2$ – *окружность радиуса* $r = 2$ *с центром в точке* $б(0; 1)$.

Выполним чертёж:



Эллипс – это множество всех точек плоскости, сумма расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1, F_2, называемых **фокусами** эллипса, – есть величина постоянная, численно равная длине большой оси этого эллипса: $2a$.
При этом расстояния между фокусами меньше данного значения: $|F_1F_2| < 2a$.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где a, b – положительные действительные числа, причём $a > b$.



Отрезок A_1A_2 называют **большой осью** эллипса;
отрезок B_1B_2 – **малой осью**;
число $a = |OA_1| = |OA_2|$ называют **большой полуосью** эллипса;
число $b = |OB_1| = |OB_2|$ – **малой полуосью**.

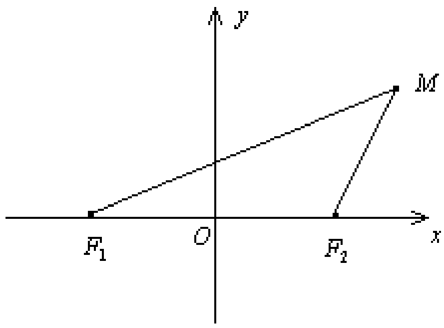
Если эллипс задан каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то его фокусы имеют координаты $F_1(c;0), F_2(-c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$ – это **расстояние от каждого из фокусов до центра симметрии эллипса**.

Эксцентриситет эллипса и его геометрический смысл

Эксцентриситетом эллипса называют отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}$, которое может принимать значения в пределах $0 \le \varepsilon < 1$.

Гипербола

Из школьного курса математики известно, что кривая, задаваемая уравнением , где - число, называется гиперболой. Однако это - частный случай гиперболы (равносторонняя гипербола).
Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек той же плоскости, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная.



Так же, как и в случае эллипса, для получения уравнения гиперболы выберем подходящую систему координат. Начало координат расположим на середине отрезка между фокусами, ось направим вдоль этого отрезка, а ось ординат - перпендикулярно к нему.

Теорема: *Пусть расстояние между фокусами* F_1 *и* F_2 *гиперболы равно* $2c$ *, а абсолютная величина разности расстояний от точки гиперболы до фокусов равна* $2a$ *. Тогда гипербола в выбранной выше системе координат имеет уравнение*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

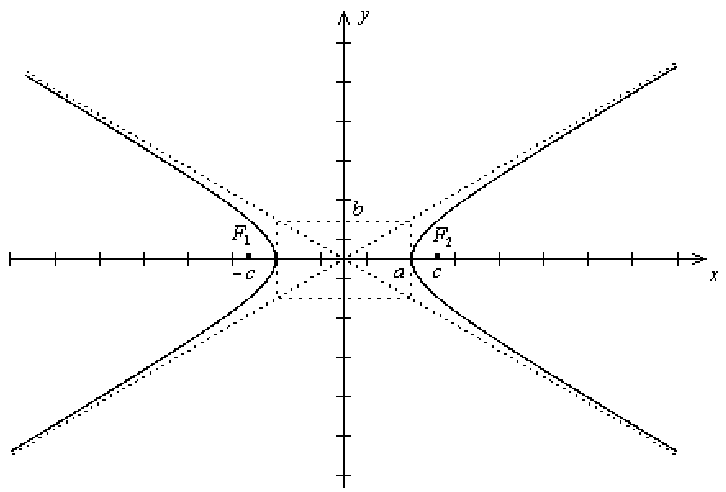
Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ называется каноническим уравнением гиперболы.

Гипербола обладает двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии, на одной из которых лежат фокусы гиперболы, и центром симметрии. Если гипербола задана каноническим уравнением, то ее осями симметрии служат координатные оси Ox и Oy , а начало координат -- центр симметрии гиперболы.

Проведем построение гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$

Заметим, что из-за симметрии достаточно построить кривую только в первом координатном угле.

Выразим из канонического уравнения y как функцию x , при условии, что $y > 0$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ и построим график этой функции.



Точки пересечения гиперболы, заданной каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ с осью Ox называются вершинами гиперболы, отрезок между ними называется действительной осью гиперболы. Отрезок оси ординат между точками $(0; -b)$ и $(0; b)$ называется мнимой осью. Числа a и b называются соответственно действительной и мнимой полуосями гиперболы. Начало координат называется ее центром.

Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом гиперболы.

Из равенства следует, что $c > a$, то есть у гиперболы $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет ε характеризует угол между асимптотами, чем ближе ε к 1, тем меньше этот угол.

В отличие от эллипса в каноническом уравнении гиперболы соотношение между величинами a и b может быть произвольным. В частности, при $a = b$ мы получим равностороннюю гиперболу, известную из школьного курса математики.

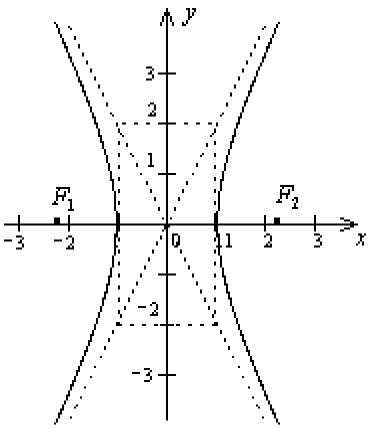
Для отражения на рисунке качественных характеристик гиперболы достаточно определить ее вершины, нарисовать асимптоты и нарисовать гладкую кривую, проходящую через вершины, приближающуюся к асимптотам и похожую на кривую рисунка.

Пример 12.4 Постройте гиперболу $4x^2 - y^2 = 4$, найдите ее фокусы и эксцентриситет.

Решение. Разделим обе части уравнения на 4. Получим каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1,$$

$a=1$, $b=2$. Проводим асимптоты $y=\pm 2x$ и строим гиперболу (рис. 12.13).



Из формулы $b=\sqrt{c^2-a^2}$. получим $c=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. Тогда фокусы -- $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

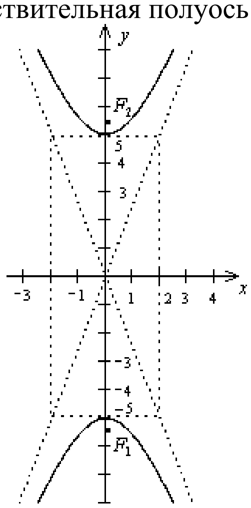
Пример 12.5 Постройте гиперболу $25x^2+100=4y^2$. Найдите ее фокусы и эксцентриситет.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $-\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$

Данное уравнение не является каноническим уравнением гиперболы, так как знаки перед x^2 и y^2 противоположны знакам в каноническом уравнении. Однако, если переобозначить переменные $\tilde{x}=y$, $\tilde{y}=x$, то в новых переменных получим каноническое уравнение

$$\frac{\tilde{x}^2}{5^2}-\frac{\tilde{y}^2}{2^2}=1.$$

Действительная ось этой гиперболы лежит на оси $O\tilde{x}$, то есть на оси Oy исходной системы координат, асимптоты имеют уравнение $\tilde{y}=\pm\frac{2}{5}\tilde{x}$, то есть уравнение $y=\pm\frac{5}{2}x$ в исходных координатах. Действительная полуось равна 5, мнимая -- 2. В соответствии с этими данными проводим построение.



Из формулы $b=\sqrt{c^2-a^2}$. получим $c=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{29}}{5}$, фокусы лежат на действительной оси -- $F_1\left(0;-\sqrt{29}\right)$, $F_2\left(0;\sqrt{29}\right)$, где координаты указаны в исходной системе координат.

Парабола

> Параболой называется геометрическое место точек M, для каждой из которых расстояние r до данной точки F (фокуса) равно расстоянию d до данной прямой (директрисы).

1. Парабола с вершиной в начале координат. Рассмотрим уравнение кривой второго порядка

$$\boxed{y^2 = 2px.} \qquad (11.19)$$

Уравнение (11.19) называется ***уравнением параболы***, число p является ***параметром параболы***.

Парабола является неограниченной кривой, так как $y = \pm\sqrt{2px} \to \infty$ при $x \to \infty$. Парабола имеет только одну ось симметрии — ось Ox, называемую ***осью параболы***, и не имеет центра симметрии. Точка пересечения оси параболы с кривой называется ***вершиной*** параболы. Точка $F\left(\frac{p_2}{2};0\right)$(рис. 163) называется ***фокусом*** параболы.

Проведем прямую

$$x = -\frac{p}{2}, \qquad (11.20)$$

называемую ***директрисой*** параболы. Расстояние d от любой точки $M(x;\, y)$ параболы до директрисы составляет $d = |MK| = x + \frac{p}{2}$.

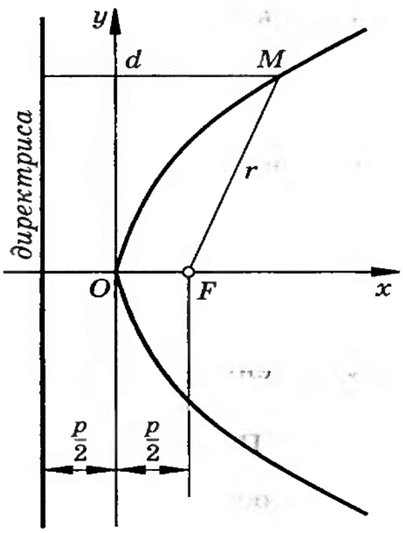


Рис. 163

Если в уравнении (11.19) поменять местами переменные x и y, то получим уравнение

$$x^2 = 2py \qquad (11.21)$$

параболы, для которой осью симметрии служит ось Oy. Решив уравнение (11.21) относительно y, получим $y = \frac{1}{2p}x^2$, а положив $\frac{1}{2p} = a$, придем к уже известному из курса алгебры виду уравнения параболы $y = ax^2$.

Если для параболы осью симметрии служит ось Ox, то при $p > 0$ ее ветви направлены вправо, при $p < 0$ — влево. Когда же осью параболы является ось Oy, то если в уравнении (11.21) $p > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $p < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

♦ ПРИМЕР 1

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус F находится в точке (3; 0).

РЕШЕНИЕ. Используем предшествующие обозначения: фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$, отсюда $p/2 = 3$, $p = 6$. По формуле (11.19) уравнение параболы имеет вид $y^2 = 12x$.

♦ ПРИМЕР 2

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директрисой служит прямая $x = -4$.

РЕШЕНИЕ. Расстояние от директрисы до начала координат составляет $p/2$, следовательно, $p = 8$. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 16x$.

♦ ПРИМЕР 3

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точку $M(4;\ 2)$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение такой параболы имеет вид (11.21). Подставив в него координаты точки M, найдем, что $p = 4$. Уравнение параболы имеет вид $x^2 = 8y$.

2. Параболы со смещенной вершиной. Пусть парабола имеет вершину с координатами $(a;\ b)$. Если ось симметрии такой параболы параллельна оси Ox, то ее уравнение имеет вид

$$(y - b)^2 = 2p(x - a) \qquad (11.22)$$

(при $p > 0$ ветви направлены вправо, при $p < 0$ ветви направлены влево); если же ось параболы параллельна оси Oy, то уравнение такой параболы имеет вид

$$(x - a)^2 = 2p(y - b) \qquad (11.23)$$

(при $p > 0$ ветви направлены вверх, при $p < 0$ — вниз). В каждом из этих уравнений расстояния от фокуса параболы до ее вершины и от вершины до директрисы равны и составляют $p/2$.

♦ ПРИМЕР

Составить уравнение параболы, имеющей вершину A с координатами (1; 2) и проходящей через точку $M(4;\ 8)$, если ось симметрии параболы параллельна оси Ox.

РЕШЕНИЕ. Подставим в уравнение (11.22) координаты вершины A и точки M: $(8 - 2)^2 = 2p(4 - 1)$, откуда $p = 6$. Подставив теперь в уравнение (11.22) найденное значение p и координаты вершины A, получим $(y - 2)^2 = 12(x - 1)$.

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.	***Вариант 2.***
№ 1. Составить уравнение окружности с центром	
в начале координат и радиусом, равным $\sqrt{3}$.	в точке (-2; -5) и радиусом, равным 3.
Построить эти окружности.	
№ 2. Из уравнения окружности найти ее радиус и координаты центра. Изобразить окружности:	

$(x-2)^2+(y+5)^2=16$	$x^2+(y-3)^2=25$
№ 3. Составить уравнение эллипса:	
с фокусами на оси *Ox*, если $2a = 8$, $2b = 6$.	с фокусами на оси *Oy*, если $2a = 10$, $2b = 4$.
№ 4. Найти координаты вершин, фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса. Построить эллипс.	
$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$	$\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{100}=1$
№ 5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:	
ее вершины находятся в точках *A1* (-5; 0) и *A2* (5; 0), а *F1F2* = 14.	ее действительная полуось равна 12, а мнимая полуось равна 5.
№ 6. Даны гиперболы:	
$36x^2-64y^2=2304$	$16x^2-25y^2=400$
Найти длины осей, координаты вершин, фокусов, уравнения асимптот и эксцентриситет. Построить гиперболу.	
№ 7. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее фокус находится в точке	
F (5; 0).	*F* (- 4; 0).
Изобразить параболу.	
№ 8. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директрисой служит прямая:	
$y = 1$.	$y = -4$.
Сделать рисунок.	

Практическое занятие № 6

Тема:Вычисление пределов функций одной переменной

Цель занятия: Научиться вычислять пределы функций, раскрывать неопределенности по правилу Лопиталя.

Оснащение рабочего места: Инструкционно – технологическая карта, тетрадь, ручка.

Контрольные вопросы:

7. Что называется пределом функции?
8. Свойства пределов функции.
9. Раскрытие неопределенностей.
10. Правило Лопиталя.
11. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+5)$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-5)$; 3. $\lim\limits_{x\to -1}(4x-x^3)$;

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-8}{4x+2}$; 5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+1}{x+1}$; 6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3-x^2+1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$; 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; 9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{5x^2+4x-1}$;

10. $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-3x+2\right)$; 11. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-8}{3x^2-3x-18}$; 12. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2+x)(3+x)}{4-x^2}$;

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x+7}$: 14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-6x+8}{x+10x^2-10}$. 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$; 17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$; 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

Практическое занятие №7

Тема: Дифференцирование функций одной переменной. Производные высших порядков

Вариант 1

1) Найдите производную заданной функции

а) $f(x) = x^7 - 5x^4 + 12x^2 - 0{,}5x + 125$

б) $f(x) = x^3 \cos x$

в) $f(x) = \dfrac{tgx}{x^2-4}$

г) $f(x) = \sin(x^3 - 4x^2 + 5x - 14)$

2) Найдите значение производной функции в заданной точке

а) $y = \sin\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

б) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 1$ $x_0 = -1$

3) Решите уравнение: $f'(x) = 0$

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

4) Решите неравенство: $f'(x) \le 0$

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 8$

Вариант 2

1) Найдите производную заданной функции

а) $f(x) = 3x^8 - 3x^5 + 11x^2 - 0{,}3x + 127$

б) $f(x) = x^4 \sin x$

в) $f(x) = \dfrac{ctgx}{\quad}$

x^3

г) $f(x) = \cos\left(x^4 + 4x^3 + 4\right)$

2) Найдите значение производной функции в заданной точке

а) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$

б) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 3x^2 + 2 \quad x_0 = -1$

3) Решите уравнение: $f'(x) = 0$

$f(x) = x^2 + 2x - 8$

4) Решите неравенство:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x + 12$

Вариант 3

$f'(x) \geq 0$

1) Найдите производную заданной функции

а) $f(x) = x^7 - 5x^4 + 12x^2 - 0{,}5x + 125$

б) $f(x) = x^5 \cos x$

в) $f(x) = \frac{tgx}{x^4}$

г) $f(x) = tg\left(x^3 - 4x^2 + 5x - 14\right)$

2) Найдите значение производной функции в заданной точке

а) $y = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

б) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad x_0 = -2$

3) Решите уравнение: $f'(x) = 0$

$f(x) = 4x^2 - 4x + 3$

4) Решите неравенство: $f'(x) > 0$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 8$

Вариант 4

1) Найдите производную заданной функции

а) $f(x) = 3x^8 - 3x^5 + 11x^2 - 0{,}3x + 127$

б) $f(x) = x^7 \sin x$

в) $f(x) = \frac{x^3}{ctgx}$

г) $f(x) = ctg\left(x^4 + 4x^3 + 4\right)$

2) Найдите значение производной функции в заданной точке

а) $y = \cos\left(2x - \pi\right. \quad x_0 = \pi$

б) $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^2+3x^2+2 \quad x_0=-2$

3) Решите уравнение: $f'(x)=0$

$f(x)=6x^2+2x-8$

4) Решите неравенство: $f'(x)<0$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x+12$

Практическое занятие №8

Практическое занятие №8

Тема: Вычисление неопределѐнного интеграла непосредственным интегрированием, методом подстановки
Цель работы: закрепить навык вычисления неопределенных интегралов методом замены переменной и по формуле интегрирования по частям.

Порядок проведения работы

1. Повторить теоретический и практический материал по конспекту
2. Выполнить задания по вариантам и оформить отчет о работе (написать условие задания, решение и ответ).

Основные понятия и определения

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $y = f(x)$ на промежутке $(a; b)$, конечном или бесконечном, если функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого промежутка и ее производная удовлетворяет следующему равенству:

$$F'(x) = f(x)$$

Пример Функция $F(x) = \frac{x^2}{2}$ является первообразной для функции $f(x) = x$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x)$$

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$ на некотором промежутке, то и функция $\Phi(x) = F(x) + C$, где C - произвольная постоянная, также будет первообразной для функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке.
Каждая функция, которая является первообразной для функции $f(x)$, может быть представлена в виде $F(x) + C$.

Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$, определенных на заданном промежутке, называется **неопределенным интегралом от функции** $y = f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. То есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Знак $\int$ называется **интегралом**, $f(x)dx$ **- подынтегральным выражением**, $f(x)$ **- подынтегральной функцией**, а x **- переменной интегрирования**.

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется**интегрированием функции** $f(x)$. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию.

Свойства неопределенного интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла или вносить под знак интеграла

$$\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от суммы/разности двух и больше функций равен сумме/разности неопределенных интегралов от этих функций

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:
    $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$
14. «Длинный» логарифм:
    $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Методы решения неопределенных интегралов

1. Метод непосредственного интегрирования

Приведение к табличному виду или **метод непосредственного интегрирования**. С помощью тождественных преобразований подынтегральной функции интеграл сводится к интегралу, к которому применимы основные правила интегрирования и возможно использование таблицы основных интегралов.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int 2^{3x-1} dx$

Решение. Воспользуемся свойствами интеграла и приведем данный интеграл к табличному виду.

$$\int 2^{3x-1} dx = \int 2^{3x} \cdot 2^{-1} dx = \frac{1}{2} \int \left(2^3\right)^x dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int 8^x dx = \frac{8^x}{2\ln 8} + C$$

Ответ. $\int 2^{3x-1} dx = \frac{8^x}{2\ln 8} + C$

Интегрирование заменой переменной

Интегрирование заменой переменной или методом подстановки. Пусть $x = \phi(t)$, где функция $\phi(t)$ имеет непрерывную производную $\phi'(t)$, а между переменными x и t существует взаимно однозначное соответствие. Тогда справедливо равенство

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \cdot dt$$

Определенный интеграл зависит от переменной интегрирования, поэтому если выполнена замена переменных, то обязательно надо вернуться к первоначальной переменной интегрирования.

Пример

Задание. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3-5x}$

Решение. Заменим знаменатель на переменную t и приведем исходный интеграл к табличному.

$$\int \frac{dx}{3-5x} \left\| \begin{array}{l} 3-5x = t \\ -5dx = dt \\ dx = -\frac{dt}{5} \end{array} \right\| = \int \frac{-\frac{dt}{5}}{t} = -\frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} =$$
$$= -\frac{1}{5} \ln|t| + C = -\frac{1}{5} \ln|3-5x| + C$$

Ответ. $\int \frac{dx}{3-5x} = -\frac{1}{5} \ln|3-5x| + C$

Интегрирование по частям

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.	**Вариант 2.**
№ 1. Вычислите неопределенные интегралы методом замены переменной	
А) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$ **Б)** $\int (1+4x)^{0,6} dx$ **В)** $\int tg\, 3x \cdot dx$	**А)** $\int x \cdot e^{-x^2} dx$ **Б)** $\int (3x-1)^5 dx$ **В)** $\int \cos^5 x \cdot \sin x \, dx$
Вариант 3.	**Вариант 4.**
№ 1. Вычислите неопределенные интегралы методом замены переменной	
А) $\int e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx$ **Б)** $\int \sqrt{2x-1}\, dx$ **В)** $\int (2x+7)^7 dx$	**А)** $\int (e^{3x}+5)\, dx$ **Б)** $\int \frac{dx}{(4-3x)^2}$ **В)** $\int 2\cos^3 x \cdot \sin x \, dx$

Практическое занятие № 9.

Тема: Вычисление определенных интегралов непосредственно и с помощью подстановки

Цель работы: закрепить навык вычисления определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница, методом замены переменной и методом интегрирования по частям.

Основные понятия и определения

Правила интегрирования

1. $\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

2. $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм: $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$
14. «Длинный» логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Вычисление определенного интеграла

Метод непосредственного интегрирования

Пример 1.

Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 (5x^5+4x^3-5x-2)\,dx$.

Решение.

Используя формулы (1), (2), получим

$$\int_0^1 (5x^5+4x^3-5x-1)dx=5\int_0^1 x^5dx+4\int_0^1 x^3dx-5\int_0^1 xdx-2\int_0^1 dx=\left(\frac{5x^6}{6}+\frac{4x^4}{4}-\frac{5x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^1=$$

$$¿\left(\frac{5\cdot1^6}{6}+\frac{4\cdot1^4}{4}-\frac{5\cdot1^2}{2}-2\cdot1\right)-0=-4\frac{1}{3}$$

<u>Пример 2.</u>

Вычислите определенный интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение.

Используя формулу (7), получим

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-(ctg\frac{\pi}{3}-ctg\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{3}+1=\frac{1-\sqrt{3}}{3}.$$

<u>Пример 3.</u>

Вычислите определенный интеграл $\int_{-2}^{0} (x^2+2x)dx$.

Решение.

Используя формулу (1), получим

$$\int_{-2}^{0} (x^2+2x)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}=0-\left(\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2\right)=\frac{8}{3}-4=2\frac{2}{3}-4=2\frac{2}{3}-3\frac{3}{3}=-1\frac{1}{3}.$$

<u>Пример 4.</u>

Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$.

Решение.

Используя формулу (16), получим

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3^2+x^2}=\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}arctg0=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\cdot0=\frac{\pi}{18}.$$

<u>Пример 5.</u>

Вычислите определенный интеграл $\int_4^5 (4-x)^3dx$.

Решение.

Используя формулу (20), получим

$$\int_4^5 (4-x)^3dx=\frac{(4-x)^4}{-4}\Big|_4^5=\frac{(4-5)^4}{-4}-\frac{(4-4)^4}{-4}=-\frac{1}{4}+0=-\frac{1}{4}.$$

Метод замены переменной

<u>Пример 6.</u>

Вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^{2} (x^2-1)^3\cdot xdx$.

Решение.

Выполняя замену переменных и используя формулу (1), получим

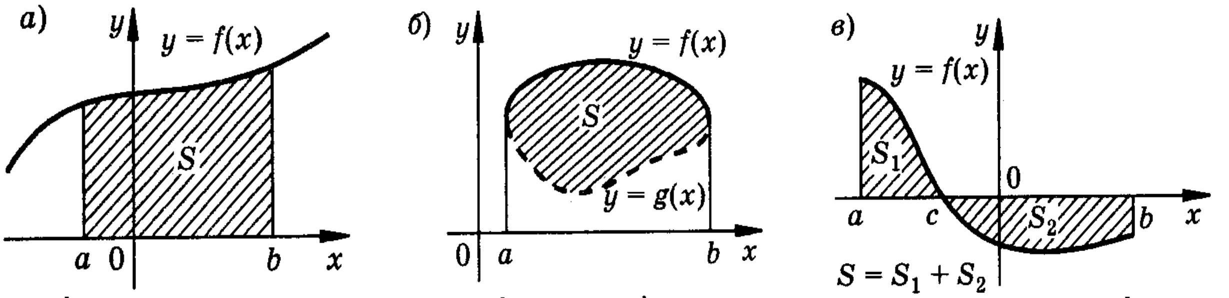
$$\int_{-1}^{2}(x^2-1)^3 xdx = ¿\left[x^2-1=t ¿\right]\left[2xdx=dt ¿\right]\left[xdx=\frac{1}{2}dt ¿\right]\left[t_н=(-1)^2-1=0 ¿\right]¿ ¿¿$$

$$¿$$

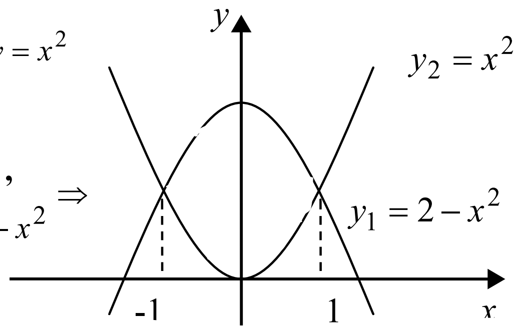
Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.	***Вариант 2.***
№ 1. Вычислить определенные интегралы непосредственно:	
1) $\int_{1}^{2}\left(4x^3-6x^2+2x+1\right)dx$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x\right)dx$	1) $\int_{2}^{3}\left(3x^2-4x-1\right)dx$ 2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-2\cos x\right)dx$
№ 2. Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:	
1) $\int_{-1}^{2}\left(x^2-1\right)^3 x\,dx$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin+1}\,\cos x\,dx$	1) $\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)^3 x\,dx$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos x\,dx$
Вариант 3.	***Вариант 4.***
№ 1. Вычислить определенные интегралы непосредственно:	
1) $\int_{-1}^{0}\left(x^3+2x\right)dx$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}5\left(\cos x-\sin x\right)dx$	1) $\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x^2}\,dx$ 2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx$
№ 2. Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:	
1) $\int_{0}^{3}\sqrt[3]{3x-1}\,dx$ 2) $\int_{0}^{-\frac{1}{2}}e^{-2x}\,dx$	1) $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\left(3x+1\right)^4}$ 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 x\,dx$

Геометрические приложения определенного интеграла»
Вычисление площади плоской фигуры



$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx \qquad S_1=\int_a^c f(x)dx;\ \ S_2=-\int_c^b f(x)dx$$



Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$ и $y=2-x^2$.

Решение: Найдем координаты точек пересечения линий: $\begin{cases} y=x^2, \\ y=2-x^2 \end{cases} \Rightarrow$

$x^2=2-x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=1 \quad \Leftrightarrow$

$x_1=-1$; $\quad x_2=1 \Rightarrow a=-1$; $\quad b=1$.

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\left(2-x^2\right)-x^2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx=2\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=$$

$$=2\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=2\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1-\frac{(-1)^3}{3}\right)\right)=\frac{8}{3};$$

Варианты заданий

Вариант1

Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, прямой x=2 и осью OX

Вариант 2

Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x$ и осью OX

Вариант 3

Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^2-5$, осью Ox и осью Oy

Вариант 4

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2;\ y=\sqrt{x}$

Практическое занятие №10

Тема: **Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных функции двух переменных**

<u>Цель работы</u>: научиться находить частные производные и дифференциалы функции нескольких переменных.

Порядок выполнения работы

1. Повторить учебный материал по конспекту в тетради.
2. Выполнить работу по вариантам и записать ответы к решениям.

Основные понятия и определения

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

1°. Пусть $M(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)$ – произвольная фиксированная точка из области определения D функции

$u = f(x_1, ..., x_n)$ и точка $N(x_1, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_n) \in D.$ Если существует предел

$$\lim_{N \to M} \frac{f(N) - f(M)}{|MN|} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_k + \Delta x_k, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_k, ..., x_n)}{\Delta x_k},$$

то он называется *частной производной первого порядка* данной функции по переменной x_k в точке M и обозначается $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k(M)}$, или $f'_{x_k}(x_1, ..., x_n)$.

Частные производные вычисляются по правилам дифференцирования функции одной переменной, при этом все переменные, кроме x_k, рассматриваются как постоянные.

2°. *Частными производными второго порядка* функции $u = f(x_1, ..., x_n)$ по соответствующим переменным называются частные производные от ее частных производных первого порядка, они обозначаются:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f''_{x_k x_k}(x_1, ..., x_k, ... x_n) = f''_{x_k^2}(M), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f''_{x_k x_l}(M)$$

и т.д. Аналогично определяются частные производные порядка выше второго.

Теорема 9.2 Если смешанные производные $f''_{x_k x_l}$ и $f''_{x_l x_k}$ непрерывны, то они совпадают: $f''_{x_k x_l} = f''_{x_l x_k}$.

Таким образом, результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от порядка дифференцирования при условии, что возникающие при этом "смешанные" частные производные непрерывны.

Пример 4. Найти частные производные первого и второго порядков от функции $z = \ln(x^2 - y^2)$.

∇ Считая последовательно постоянной "y", затем "x", и применяя правило дифференцирования сложной функции, получим: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 - y^2)} \cdot (x^2 - y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(x^2 - y^2)} \cdot (x^2 - y^2)'_y = -\frac{2y}{x^2 - y^2}$. Дифференцируя вторично, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2 - y^2}\right) = 2\frac{(x^2 - y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2} = -2\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2 - y^2}\right) = 2x\left(-\frac{(-2y)}{(x^2 - y^2)^2}\right) = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2y}{x^2 - y^2}\right) = -2y\left(-\frac{2x}{(x^2 - y^2)^2}\right) = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y}{x^2 - y^2}\right) = -2\frac{(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = -2\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}.\#$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференциал первого порядка функции $f(x_1, ..., x_n)$ в точке $M(x_1, x_2 ..., x_n)$ находится по формуле $df(M) = f'_{x_1}(M) \cdot \Delta x_1 + ... + f'_{x_n}(M) \cdot \Delta x_n$.

Чаще дифференциал функции f выражается через дифференциалы независимых переменных:

$$df(M) = f'_{x_1}(M) \cdot dx_1 + ... + f'_{x_n}(M) \cdot dx_n.$$

Функции u и v нескольких переменных подчиняются обычным правилам дифференцирования:

$$d(u + v) = du + dv, \quad d(uv) = vdu + udv, \quad d(u / v) = (vdu - udv) / v^2.$$

Пример . Найти дифференциал функции $f(x,y,z)=x^2y^3/z^4$.

Первый способ. По формуле (5.4): $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2xy^3}{z},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{3x^2y^2}{z^4},\ \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{4x^2y^3}{z^5}$,

$$df(x,y,z)=\frac{2xy^3}{z^4}dx+3\frac{3x^2y^2}{z^4}dy-\frac{4x^2y^3}{z^5}dz=xy^2(2yzdx+3xzdy-4xydz)/z^5.$$

Второй способ. Применяем правила дифференцирования (5.5):

$$df(x,y,z)=d(x^2y^3\cdot\frac{1}{z^4})=\frac{1}{z^4}d(x^2y^3)+x^2y^3d(\frac{1}{z^4})=(y^3\cdot 2xdx+x^2\cdot 3y^2dy)/z^4+$$
$$+x^2y^3\cdot(-4dz/z^5)=xy^2(2yzdx+3xzdy-4xydz)/z^5.$$

Вариант 1.	***Вариант 2.***
№ 1. Вычислить значения частных производных функции:	
а) $z=5x^2-3xy+2y^3-1$ б) $z=\frac{x-2y}{x+y}$ в точке М (2;-1) в) $z=x^2\sin y$	а) $z=2x^4+3x^2y+4y^3+5$ б) $z=\frac{x-y}{x+y}$ в точке М (-2;3) в) $z=arctg\frac{x}{y}$
№ 2. Вычислить полный дифференциал функции	
$z=2x^3+3x^2y^2-3y^3$ в точке M (1; 2)	$z=\frac{y}{x+y}$ в точке M (2; – 1).
№ 3. Вычислить частные производные 1-го и 2-го порядков функции	
$z=x^4+x^3y^2+y^5+5$ в точке M (-1; 2).	$z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$ в точке M (-1; 2).

Практическое занятие № 11

Тема: **приложение двойных интегралов**

Цель работы: научиться

- вычислять повторные интегралы;
- вычислять двойной интеграл по заданной области D;
- изменять порядок интегрирования в двойном интеграле;
- вычислять площадь области с помощью двойного интеграла;
- закрепить навыки построения графиков функций.

Порядок выполнения работы

1. Повторить теоретический и практический материал по конспекту
2. Выполнить работу по вариантам и записать ответы к решениям.

Основные понятия и определения

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПОВТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение. *Повторный интеграл* $\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ есть приращение первообразной $F(x,y)$ для $f(x,y)$ по переменной "y", проинтегрированное по переменной "x" , т.е.

$$\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy=\int_a^b\left[F(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\right]dx=\int_a^b\left[F(x,y_2(x))-F(x,y_1(x))\right]dx.$$

Определение. *Повторный интеграл* $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ есть приращение первообразной $\Phi(x,y)$ для $f(x,y)$ по переменной "x", проинтегрированное по переменно1 "y", т.е.

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx = \int\limits_c^d \left[\Phi(x,y)\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)}\right]dy = \int\limits_c^d \left[\Phi(x_2(y),y) - \Phi(x_1(y),y)\right]dy.$$

Пример 3. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (x-2y)dy$.

∇ $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (x-2y)dy =$ | интегрируя внутренний интеграл по "y", полагаем "x" постоянным | =

$$\int\limits_1^2 dx \left(x \int\limits_x^{x^2} dy - 2\int\limits_x^{x^2} y dy \right) = \int\limits_1^2 \left[x\left(y\Big|_x^{x^2} \right) - 2\left(y/2\Big|_x^{x^2} \right) \right] dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left[x(x^2-x) - (x^4 - x^2)\right]dx = \int\limits_1^2 (x^3 - x^4)dx = \left(x^4/4 - x^5/5\right)\Big|_1^2 = -49/20.$$

При вычислении повторного интеграла можно изменять порядок интегрирования.

Если : 1) функция $f(x,y)$ интегрируема в правильной в направлении Oy области S: $\{a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, т.е. существует двойной интеграл $\iint\limits_S f(x,y)dS$,

2) существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, то

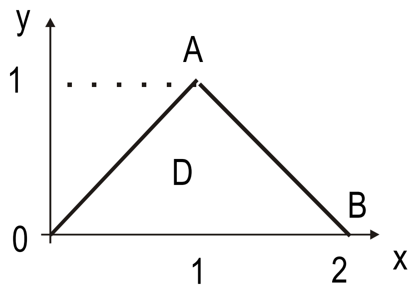
$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy}$$

Если :1) функция $f(x,y)$ интегрируема в правильной в направлении Ox области $S:\{c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, т.е. существует двойной интеграл $\iint\limits_S f(x,y)dS$,

2) существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$, то

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx}.$$

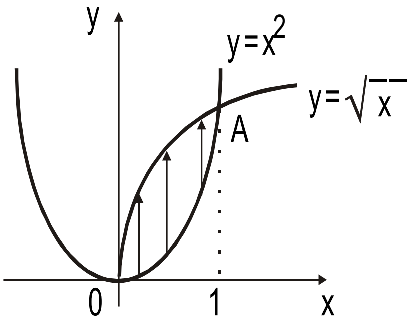
Пример 1. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx$.



∇ Так как имеем $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, то правильная в направлении Ox область D ограничена линиями $x=y$, $x=2-y$, $y=0$, $y=1$ (линия $y=1$ выродилась в точку) (рис.). Так как участок OAB границы состоит из отрезков прямых $OA: y = x,\quad x \in [0;1]$ и $AB: y = 2 - x,\quad x \in [1,2]$, то $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1: \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le x\}$,

$D_2: \{1 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2-x\}$.

Итак, $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f dx = \iint\limits_{D=D_1 \cup D_2} f dxdy = \iint\limits_{D_1} f dxdy + \iint\limits_{D_2} f dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.



Пример 2. Вычислить $I = \iint\limits_D (x+y^2)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

∇ Изобразим область D. Для отыскания точек пересечения парабол $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ решаем уравнение $x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x,$

$x^4 - x = 0,\ x(x-1)(x^2+x+1) = 0$, откуда имеем действительные корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Таким образом, параболы пересекаются в точках $O(0;0),\ A(1;1)$ (рис.). Рассматривая *D* как правильную в направлении *Oy* , имеем $D: \{0 \le x \le 1;\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$. По формуле

$$I = \iint\limits_D (x+y^2)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left[\left(x \cdot y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right] = \int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3} x\sqrt{x} - x^3 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \left(\frac{8}{15} x^{5/2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{33}{140}.$$

Если область D рассматривать как правильную в направлении *Ox*,то $D: \{\, 0 \le y \le 1;\ y^2 \le x \le \sqrt{y}\}$. По формуле

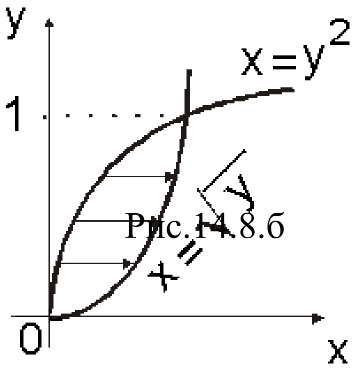


Рис.14.8.б

$$I = \iint\limits_D (x+y^2)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} (x+y^2)dx = \int\limits_0^1 dy \left[\left(\frac{x^2}{2} + y^2 x \right) \Bigg|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} \right] =$$

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{y}{2} + y^{5/2} - \frac{3}{2} y^4 \right) dy =$$

$$= \left(\frac{y^2}{4} + \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{3}{10} y^5 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{33}{140}.$$

Задания для самостоятельного решения

Вариант 1.	***Вариант 2.***
№ 1. Вычислить повторный интеграл:	
$\int\limits_1^2 dx \int\limits_2^{x^2+3} \frac{1}{x^2} dy$	$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 \left(x^2 + 2xy \right) dy$
№ 2. Вычислить двойной интеграл:	
$\iint \left(x+y \right) dx\, dy$ по области *D*, ограниченной прямыми	$\iint\limits_D \frac{y}{x} dx\, dy$, где *D* – область, ограниченная линиями

$x=2,\ x=5,\ y=1,\ y=3$.	$y=x,\ y=4x,\ y=\dfrac{4}{x}$
№ 3. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:	
$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{-x^2+2} f(x,y)\,dy$	$\int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy$
№ 4. Вычислить площадь области, ограниченной линиями	
$y=x^2,\ y=x+6$.	$y=\dfrac{8}{x},\ y=-x+9$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12

Тема: «Решение дифференциальных уравнений первого порядка»

Цель работы: научиться

- Решать простейшие дифференциальные уравнения первого порядка методом непосредственного интегрирования;
- Решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися Переменными.

Порядок выполнения работы

1. Повторить теоретический и практический материал по конспекту
2. Выполнить работу по вариантам и записать ответы к решениям.

Основные понятия и определения

Дифференциальное уравнение — уравнение, связывающее значение некоторой неизвестной функции в некоторой точке и значение её производных различных порядков в той же точке. Дифференциальное уравнение содержит в своей записи неизвестную функцию, её производные и независимые переменные; однако не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным уравнением.

Порядок дифференциального уравнения — наибольший порядок производных, входящих в него.

Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием.

Все дифференциальные уравнения можно разделить на линейные и не линейные.

Нелинейное дифференциальное уравнение - дифференциальное уравнение (обыкновенное или с частными производными), в которое по крайней мере одна из производных неизвестной функции (включая и производную нулевого порядка - саму неизвестную функцию) входит нелинейно.

Иногда под Н.Д.У. понимается наиболее общее уравнение определенного вида. Напр., нелинейнымобыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка наз. уравнение $f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$ с произвольной функцией $f(x,\ y,\ u)$ при этом линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка соответствует частному случаю

$$f(x,\ y,\ u)=a(x)u+b(x)y.$$

Н. д. у. с частными производными 1-го порядка для неизвестной функции z от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид:

$$F\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0,$$

где F- произвольная функция своих аргументов;

ВИДЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-ГО ПОРЯДКА

Уравнения с разделенными переменными

П1. $P(x)dx+Q(y)dy=0$. Общий интеграл $\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C$.

П2. $P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$. Общий интеграл $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy=C$.

ПРИМЕР

Найти все решения дифференциального уравнения

$y'=-xe^y$

Решение.

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{dx}=-xe^y,$$

$$\frac{dy}{e^y}=-xdx,$$

$$e^{-y}dy=-xdx.$$

Очевидно, что деление на еу не приводит к потере решения, поскольку еу > 0. После интегрирования получаем

$$\int e^{-y}dy=\int(-x)dx+C,$$

$$-e^{-y}=-\frac{x^2}{2}+C \quad \text{или} \quad e^{-y}=\frac{x^2}{2}+C.$$

Данный ответ можно выразить в явном виде:

$$-y=\ln\left(\frac{x^2}{2}+C\right) \quad \text{или} \quad y=-\ln\left(\frac{x^2}{2}+C\right).$$

В последнем выражении предполагается, что константа С > 0, чтобы удовлетворить области определения логарифмической функции.

Задания для самостоятельного решения

1 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y'=2y$ б) $y'=\frac{3x}{y}$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'=2y$ при начальных условиях y(2)=3.

2 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y'=-\frac{1}{3}y$ б) $y'=xy$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1-x)y'-y=0$, если y(0)=1.

3 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y'=-3y$ б) $y'=\frac{2x}{y}$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'=2y$ при условии y(1)=3

4 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y^{'}=y^2$ б) $y^{'}\sqrt{y}=\sin x$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y^{'}=\frac{y}{x}$, если y(1)=1.

5 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y^{'}=tgy$ б) $y^{'}=e^{2x-4y}$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y^{'}=\frac{1}{\cos^2 x}$, если y(0)=1

6 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y\,y^{'}=x+1$ б) $y^{'}=2\sqrt{x}$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $1-\sqrt{1-x^2}\cdot y^{'}=0$ если $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

7 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y^{'}=2xy$ б) $y^{'}=\frac{3}{y}$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $x^2 y^{'}=y$ при начальных условиях y(1)=0.

8 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y^{'}=-\frac{1}{2}y$ б) $y^{'}=xy^2$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1-x)y^{'}-y=0$, если y(0)=1.

9 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y^{'}=-y$ б) $y^{'}=\frac{x}{y}$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $x\,y^{'}=y$ при условии y(1)=2

10вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y^{'}=x^2$ б) $x\,y^{'}+y=0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y^{'}=\frac{y}{x^2}$, если y(1)=1.

11 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y^{'}=\sin y$ б) $y^{'}=e^{2x}$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y^{'}=-\frac{1}{\sin^2 x}$, если $y(\frac{\pi}{4})=1$

12 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y\,y^{'}=x-1$ б) $y^{'}=2\cos x$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $1-\sqrt{1-x^2}\cdot y^{'}=0$ если $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

13 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y^{'}=2\sqrt{y}$ б) $x\,y^{'}+y=0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $x\,y^{'}=2y$ при начальных условиях y(2)=3.

14 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $y' = -y$ б) $y' = \sin 3x + 2$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1-x)y' - y = 0$, если y(0)=1.

15 вариант.

1. Решить дифференциальные уравнения: а) $yy' + x = 0$ б) $xy' = \dfrac{2}{y}$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' = y$ при условии y(1)=1

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13

Тема: «Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами»

Цель работы: научиться решать линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Порядок выполнения работы

1. Повторить теоретический и практический материал по конспекту
2. Выполнить работу по вариантам и записать ответы к решениям.

Основные понятия и определения

1. Дифференциальные уравнения второго порядка. В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в следующем виде:

$$F(x;\ y;\ y';\ y'') = 0, \qquad (1)$$

где $y = y(x)$ — искомая неизвестная функция, $y' = y'(x)$ и $y'' = y''(x)$ — ее производные по x первого и второго порядков, а F — заданная функция переменных x, y, y', y''.

Функция $\varphi(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется *решением дифференциального уравнения* (1), если она имеет производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$ и если для любого $x \in (a;\ b)$ справедливо равенство

$$F(x;\ \varphi(x);\ \varphi'(x);\ \varphi''(x)) = 0.$$

Другими словами, функция $\varphi(x)$, $x \in (a;\ b)$, называется решением уравнения (1), если при подстановке $\varphi(x)$ вместо y это уравнение обращается в тождество по x.

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' = f(x;\ y;\ y'), \qquad (2)$$

где f — заданная функция переменных x, y, y', называется *уравнением, разрешенным относительно второй производной*. При достаточно общих предположениях доказано, что для любых *начальных условий*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \qquad (3)$$

принадлежащих области определения функции f, существует, и притом единственное, решение $y = y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3).

Мы не будем давать строгой формулировки этого утверждения. Заметим лишь, что оно составляет основное содержание одной из фундаментальных теорем теории дифференциальных уравнений — *теоремы Коши*.

2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

где p и q — некоторые числа, называются *линейными дифференциальными уравнениями второго порядка*. Функция $f(x)$ называется *свободным членом* или *правой частью* уравнения (1).

Если $f(x) \equiv 0$, то дифференциальное уравнение называется *линейным однородным уравнением*. Оно имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{2}$$

В этом пункте будем изучать только уравнения вида (2).

Пример 1. Найти все решения уравнения

$$y'' - y = 0. \tag{3}$$

△ Легко проверить, что функция $y = e^x$ является решением данного уравнения. Аналогично проверяется, что и функция $y = e^{-x}$ является решением уравнения (3). Покажем, что при любых постоянных C_1 и C_2 функция

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} \tag{4}$$

является решением уравнения (3). Имеем

$$y' = C_1e^x - C_2e^{-x},$$
$$y'' = C_1e^x + C_2e^{-x} = y,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, любая функция вида (4) является решением уравнения (3). Более того, других решений это уравнение не имеет. Действительно, пусть $y = \varphi(x)$ — некоторое решение уравнения (3) и пусть

$$\varphi(0) = y_0, \quad \varphi'(0) = y_0'. \tag{5}$$

Найдем функцию вида (4), которая удовлетворяет этим условиям. Имеем

$$\begin{cases} y_0 = C_1 + C_2, \\ y_0' = C_1 - C_2, \end{cases}$$

и поэтому

$$C_1 = \frac{y_0 + y_0'}{2}, \quad C_2 = \frac{y_0 - y_0'}{2}.$$

Следовательно, функция

$$y = \frac{y_0 + y_0'}{2}e^x + \frac{y_0 - y_0'}{2}e^{-x}$$

является решением задачи Коши (3), (5).

В силу единственности решения задачи Коши

$$\varphi(x) = \frac{y_0 + y_0'}{2}e^x + \frac{y_0 - y_0'}{2}e^{-x},$$

т. е. функция $\varphi(x)$ получается из (4) при соответствующих значениях постоянных C_1 и C_2.

Таким образом, формула (4) задает общее решение уравнения (3). ▲

Пример 2. Решить уравнение

$$y'' - 4y = 0. \tag{6}$$

△ Как и в примере 1, решение этого уравнения будем искать в виде

$$y = e^{\lambda x},$$

где λ — неизвестное число. Подставив эту функцию в уравнение, получим

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = 0.$$

Следовательно, функция вида $e^{\lambda x}$ удовлетворяет уравнению (6) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют два числа $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$, и поэтому функции e^{2x} и e^{-2x} являются решениями уравнения (6) (что, в частности, проверяется и непосредственно).

Теперь, как и в примере 1, можно показать, что общее решение уравнения (6) задается формулой

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ▲

3. Характеристическое уравнение. Рассмотренные примеры наводят на мысль — попытаться и в общем случае искать решения вида $e^{\lambda x}$. Пусть задано линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Подставим функцию $e^{\lambda x}$ в уравнение (1):

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0.$$

Отсюда следует, что функция $e^{\lambda x}$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (1).

Заметим, что характеристическое уравнение получается из дифференциального заменой y'' на λ^2, y' на λ и y на 1.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет два действительных решения λ_1 и λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае общее решение уравнения (1) задается формулой

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Тот факт, что функция (3) удовлетворяет уравнению (1), проверяется непосредственной подстановкой, а то, что других решений уравнение (1) не имеет, следует из теоремы Коши (для уравнения (1) все ее условия выполнены).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = 0. \tag{4}$$

△ Напишем характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$. По формуле (3) получаем общее решение уравнения (4):

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}. \ \blacktriangle$$

4. Случай комплексных решений характеристического уравнения. Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Пусть его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{2}$$

не имеет действительных решений. В этом случае

$$q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Обозначим это число через ω^2. Уравнение (2) имеет два комплексно сопряженных решения:

$$\lambda = \alpha + i\omega \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} = \alpha - i\omega,$$

где $\alpha = -\frac{p}{2}$.

Тогда

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} e^{i\omega x} = e^{\alpha x} (\cos \omega x + i \sin \omega x).$$

Рассмотрим действительную и мнимую части этой комплекснозначной функции:

$$e^{\alpha x} \cos \omega x, \quad e^{\alpha x} \sin \omega x.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что эти функции являются решениями дифференциального уравнения (1). (Проверьте самостоятельно.)

Как и выше, можно показать, что в этом случае общее решение уравнения (1) задается формулой

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \omega x + C_2 e^{\alpha x} \sin \omega x, \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

△ Напишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет два комплексно сопряженных решения: $\lambda = -1 + i$ и $\bar{\lambda} = -1 - i$.

Найдем действительную и мнимую части функции $e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x} = e^{-x} (\cos x + i \sin x) = e^{-x} \cos x + i e^{-x} \sin x.$$

А затем по формуле (3) находим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x. \ ▲$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что эти функции являются решениями дифференциального уравнения (1). (Проверьте самостоятельно.)

Как и выше, можно показать, что в этом случае общее решение уравнения (1) задается формулой

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \omega x + C_2 e^{\alpha x} \sin \omega x, \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

△ Напишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет два комплексно сопряженных решения: $\lambda = -1 + i$ и $\bar{\lambda} = -1 - i$.

Найдем действительную и мнимую части функции $e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x} = e^{-x} (\cos x + i \sin x) = e^{-x} \cos x + i e^{-x} \sin x.$$

А затем по формуле (3) находим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x. \ ▲$$

Замечание. К этому типу уравнений относится уравнение гармонических колебаний

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

5. Случай, когда характеристическое уравнение имеет одно решение. Пусть характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad (1)$$

соответствующее дифференциальному уравнению

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (2)$$

имеет один корень $\lambda = \alpha$ кратности 2. Тогда $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2$. Как и выше, легко проверяется, что функция $e^{\alpha x}$ является решением уравнения (2). Покажем, что в этом случае и функция $xe^{\alpha x}$ является решением уравнения (2). Имеем

$$y = xe^{\alpha x}, \quad y' = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}, \quad y'' = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}$$

и, далее,

$$y'' + py' + qy = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x} + pe^{\alpha x} + p\alpha x e^{\alpha x} + qxe^{\alpha x} =$$
$$= e^{\alpha x}(2\alpha + p) + xe^{\alpha x}(\alpha^2 + p\alpha + q) =$$
$$= e^{\alpha x}(2\alpha - 2\alpha) + xe^{\alpha x}(\alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2) = 0.$$

Таким образом, функции $e^{\alpha x}$ и $xe^{\alpha x}$ являются решениями уравнения (2), и поэтому любая функция вида

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} \qquad (3)$$

также является решением уравнения (2). Из теоремы Коши следует, что других решений это уравнение не имеет.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

△ Характеристическое уравнение имеет одно решение $\lambda = 1$. Следовательно (см. формулу (3)), общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. ▲

Задания для самостоятельного решения

А), Б) Найти общее решение уравнения

В) Найти частное решение уравнения

№	А)	Б)	В)
1.	$y'' + 3y' - 4y = 0$	$y'' - 3y' = 0$	$y'' - 9y = 0$, если $y(0) = 2$ при $y'(0) = 6$
2.	$y'' - 9y' + 14y = 0$	$y'' + 6y' + 8y = 0$	$y'' - y' - 2y = 0$, если $y(0) = 3$

			при $y'(0)=0$
3.	$y''-y=0$	$y''-y'+\frac{1}{4}y=0$	$y''-10\{y'+25y=0¿$, если $y(0)=2$ при $y'(0)=8$
4.	$y''+2y'=0$	$y''+8y'+16y=0$	$y''+3y'+2y=0$, если $y(0)=-1$ при $y'(0)=3$
5.	$y''-14\{y'+49y=0¿$	$y''-16y=0$	$y''+6y'+9y=0$, если $y(0)=2$ при $y'(0)=1$
6.	$3y''-2y'-8y=0$	$y''-2y'=0$	$y''-3y'+2y=0$, если $y(0)=2$ при $y'(0)=3$
7.	$y''+5y'+6y=0$	$y''-6y'+9y=0$	$y''-y'-6y=0$, если $y(0)=1$ при $y'(0)=0$
8.	$y''+3y'-4y=0$	$y''-3y'=0$	$y''-9y=0$, если $y(0)=2$ при $y'(0)=6$
9.	$y''-9y'+14y=0$	$y''+6y'+8y=0$	$y''-y'-2y=0$, если $y(0)=3$ при $y'(0)=0$
10.	$y''-y=0$	$y''-y'+\frac{1}{4}y=0$	$y''-10\{y'+25y=0¿$, если $y(0)=2$ при $y'(0)=8$
11.	$y''+2y'=0$	$y''+8y'+16y=0$	$y''+3y'+2y=0$, если $y(0)=-1$ при $y'(0)=3$
12.	$y''-14\{y'+49y=0¿$	$y''-16y=0$	$y''+6y'+9y=0$, если $y(0)=2$ при $y'(0)=1$
13.	$3y''-2y'-8y=0$	$y''-2y'=0$	$y''-3y'+2y=0$, если $y(0)=2$ при $y'(0)=3$
14.	$y''+5y'+6y=0$	$y''-6y'+9y=0$	$y''-y'-6y=0$, если $y(0)=1$ при $y'(0)=0$
15.	$y''+3y'-4y=0$	$y''-3y'=0$	$y''-9y=0$, если $y(0)=2$ при $y'(0)=6$

Практическая работа №14

Тема: Исследование сходимости функциональных рядов

Цель: научиться исследовать ряд на сходимость, используя признаки Коши, Даламбера и Лейбница

Функциональный ряд называется мажорируемым в области D, если существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n \ (\alpha_n > 0)$ такой, что $\forall x \in D$ справедливы неравенства $|u_k(x)| \le \alpha_k \ (k = 1, 2, \ldots)$.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*, x_0 – фиксированное число. При $x_0 = 0$ имеем ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема Абеля.

1 Если степенной ряд сходится при некотором значении $x = x_1 \ne 0$, то он абсолютно сходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_1|$.

2 Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_2$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_2|$.

Неотрицательное число R, такое, что при всех $|x| < R$ степенной ряд сходится, а при всех $|x| > R$ – расходится, называется *радиусом сходимости ряда*.

Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости ряда*.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

если указанные пределы существуют.

3.2 Образцы решения примеров

3.2.1 *Пример.* Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Решение

Данный ряд является суммой геометрической прогрессии с $q = \ln x$. Такой ряд сходится, если $|q| = |\ln x| < 1$, т. е. при $-1 < \ln x < 1$. Поэтому областью сходимости исследуемого ряда является интервал $D_s : \frac{1}{e} < x < e$. Так как $D_x : x > 0$, то $D_s \subset D_x$.

3.3 Примеры для самостоятельной работы

3.3.1 Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$;

г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{3^n\sqrt{(n+1)^3}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n}$; е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2(n-1)}}{\sqrt{n^3-1}}$.

Ответ: а) $-2 \le x < 2$; б) $-2 < x < 2$; в) $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$; г) $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$; д) $-6 \le x < 2$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.