# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

## ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

## ЕН. 01 Математика

для очной и заочной форм обучения специальности

**для специальности**

**27.02.03 Автоматика и телемеханика на транспорте**
**( железнодорожном транспорте)**

**2023**

Практическая работа № _______

________________________________________________________________________

_________________________________________________________________

(название практической работы)

Дисциплина ___________________________________________

Студент гр.____________
(номер группы, курс)

__________________ ____________
(подпись студента) (И., О., Фамилия студента)

________________
(дата)

Преподаватель

____________________ ______________
(подпись преподавателя) (И. О. Фамилия преподавателя)

_____________________
(дата)

__________________________________
(оценка)

Самара 20___г.

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению практической работы предназначены для студентов очного отделения.

Программой учебной дисциплины «Математика» на проведение практических занятий для базового уровня профессионального образования предусмотрено для специальности «Автоматика и телемеханика на транспорте (железнодорожном транспорте)». Практические занятия проводятся в учебных кабинетах. Продолжительность каждого занятия 2 часа.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств; решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел.

Уметь применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач; применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности; использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;

Студенты предварительно должны подготовиться к занятию: изучить содержание работы на занятии, порядок ее выполнения, повторить теоретический материал, связанный с данной работой.

Методические указания содержат приложение, в котором представлен пример оформления практической работы.

## Практическая работа №1

**Тема: «Действия над комплексными числами»**

**Цель работы:** научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме, решать квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом.

### Краткие теоретические сведения.

*Комплексные числа* - числа вида $\boldsymbol{Z = a + ib}$, где $a,b$ – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ - *мнимая единица* ($i^2 = -1$). Множество комплексных чисел обозначается C.

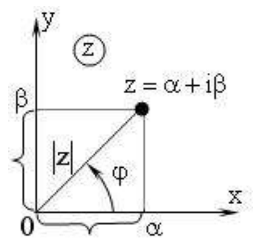
Действительные числа $a$ и $b$ комплексного числа $\boldsymbol{Z = a + ib}$, называются *действительной и мнимой частью* числа $z$ и обозначаются, соответственно, $Rez=x$ и $Imz=y$.

Два комплексных числа $z_1=a + ib$ и $z_2=c + id$ называются *равными* в том и только том случае, если $a = c$, $b = d$.

Запись $Z=a + ib$ называют *алгебраической формой* комплексного числа $z$.

Числа $Z=a + ib$ и $\bar{Z}=a - ib$ называют *комплексно сопряженными*.

*Геометрическое представление комплексного числа*




Если рассмотреть плоскость с прямоугольной системой координат, то любому комплексному числу $z = a + ib$ можно сопоставить точку на этой плоскости с соответствующими координатами (a;b), и радиус-вектор R комплексного числа, т.е. вектор, соединяющий начало координат с точкой на плоскости, соответствующей числу (рис. 1). Данная плоскость называется комплексной. Действительные числа располагаются на горизонтальной (вещественной) оси, мнимые части – на вертикальной (мнимой) оси.

$R = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - *модуль комплексного числа* - расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, *модуль – это длина* радиус-вектора.

$tg\varphi = \frac{b}{a}$, где $\varphi$- *аргумент комплексного числа.*

### Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

*Сложение:* $Z_1 + Z_2 = (a+ib)+(c+id) = (a+c) + (b+d)i$.

*Вычитание:* $Z_1 - Z_2 = (a+ib)-(c+id) = (a-c) + (b-d)i$.

*Умножение:* $Z_1 \cdot Z_2 = (a+ib)(c+id)=(ac - bd)+(ad + cb)i$.

*Деление:* $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$.

*Умножение на сопряженное*: $Z \cdot \bar{Z}=(a + bi)(a -bi)= a^2 - b^2i^2= a^2 - b^2\cdot(-1) = a^2 + b^2$ – квадрат суммы

**Примеры решения задач:**

**Пример 1.** Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраической форме:

$Z_1 = 4+ 5i$, $Z_2 = 6-9i$.

*Решение:* 1) $Z_1 + Z_2 = (4+ 5i) + (6-9i)= 4+6+5i -9i.= 10 - 4i$

2) $Z_1 - Z_2 = (4+ 5i) - (6-9i)= 4-6+5i +9i.= -2 + 14i$

3) $Z_1 \cdot Z_2 = (4+5i)(6- 9i)= 24 -36i + 30i- 45i^2= 24 -6i - 45\cdot(-1) = 69 -6i.$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+5i}{6-9i} = \frac{(4+5i)(6+9i)}{(6-9i)(6+9i)} = \frac{24+36i+30i+9i^2}{6^2+9^2} = \frac{15+66i}{36+81} = \frac{15+66i}{117} = \frac{5+22i}{39} = \frac{5}{39} + \frac{22i}{39}$

Ответ: $Z_1 + Z_2 =10 - 4i$, $Z_1 - Z_2 = -2 + 14i$, $Z_1 \cdot Z_2 =69 -6i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{39} + \frac{22i}{39}$

**Пример 2.** Раскрыть скобки, используя формулы сокращенного умножения:

1) $(2+ 3i)^2 = 2^2 + 2\cdot2\cdot3i + (3i)^2 = 4 +12i + 9\cdot(-1) = -5+12i,$

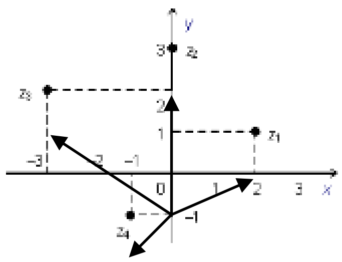
2) $(5 + 4i)(5 - 4i)= 5^2 -4^2i^2= 25 - 16\cdot(-1) = 25 + 16 =4,$

3) $(3-5i)^2 = 3^2 - 2\cdot3\cdot5i + (-5i)^2 = 9 - 30i + 25(-1) = -16-30i.$

**Пример 3.** Изобразим на комплексной плоскости числа

$Z_1 = 2 + i$; $Z_2 = 3i$;

$Z_3 = -3 + 2i$; $Z_4 = -1 - i$.



**Контрольные вопросы.**

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Какие числа называются комплексно – сопряженными?
3. Какие комплексные числа называются равными?
4. Как вычислить модуль комплексного числа?
5. Как производятся действия над комплексными числами в алгебраической форме?

**Задания для самостоятельного решения**

| *Вариант 1* | *Вариант 2* | *Вариант 3* | *Вариант 4* |
|---|---|---|---|
| 1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа: | | | |
| $Z_1 = 4i$ $Z_2 = 3 + i$ $Z_3= - 4 +3i$ $Z_4= - 2 -5i$ | $Z_1= -5i$ $Z_2= 4 + i$ $Z_3= -7 + 2i$ $Z_4= -3 - 6i$ | $Z_1= -5i$ $Z_2= 4 + i$ $Z_3= -7 + 2i$ $Z_4= -3 - 6i$ | $Z_1= -5i$ $Z_2= 4 + i$ $Z_3= -7 + 2i$ $Z_4= -3 - 6i$ |
| 2 . Вычислите модуль комплексного числа | | | |
| $Z = 3 + 4i$ | $Z = 8 + 6i$ | $Z = -1 + \sqrt{3}i$ | |
| 3. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел: | | | |
| $Z_1 = (3 + 5i)$ , $Z_2 = (7 - 2i)$ | $Z_1 = (3 - 2i)$, $Z_2 = (5 + 3i)$ | $Z_1 = (4 + 2i)$, $Z_2 = (- 3 + 2i)$. | $Z_1 = (- 2 + 3i)$, $Z_2 = (7 - 2i)$ |
| 4. Выполните действие над комплексными числами: | | | |
| а) $(2 + 3i)(5 - 7i)$, б) $(3 + 2i)(3 - 2i)$, в) $(3 + 5i)^2$, | а) $(3 + 2i)(1 + 3i)$, б) $(7 - 6i)(7 + 6i)$, в) $(2 - 7i)^2$, | а) $(- 2 + 3i)(3 + 5i)$, б) $(4 + 3i)(4 - 3i)$, в) $(4 + 2i)^2$, | а) $(6 + 4i)(5 + 2i)$, б) $(2 - 5i)(2 + 5i)$, в) $(3 - 2i)^2$, |

| | | | |
|---|---|---|---|
| г) $\frac{2+3i}{5-7i}$. | г) $\frac{3+5i}{2+6i}$. | г) $\frac{2-3i}{5+2i}$. | г) $\frac{6+2i}{3-7i}$. |
| 5. Решите уравнения: | | | |
| $x^2 - 4x + 13 = 0$. | $2{,}5x^2 + x + 1 = 0$.. | $x^2 + 3x + 4=0$ | $4x^2 - 20x + 26 = 0$ |

**Практическая работа №2**

**Тема: «Решение задач для нахождения полного сопротивления электрической цепи переменного тока с помощью комплексных чисел»**

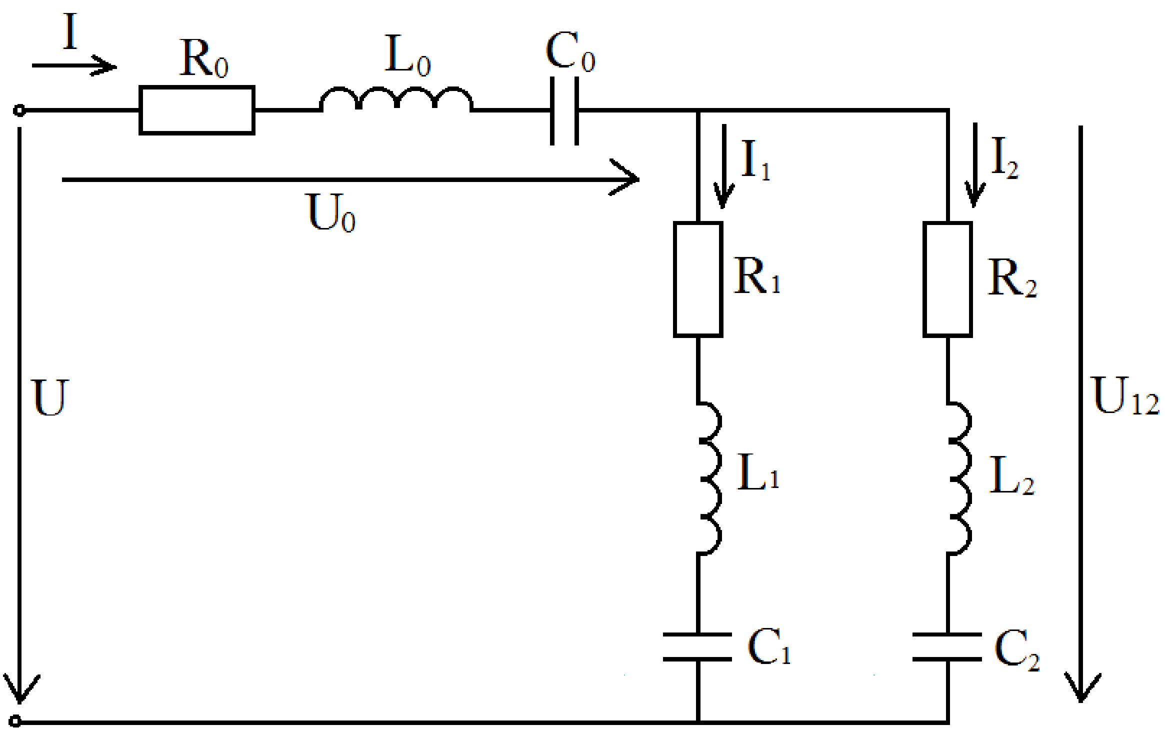
**Теоретические сведения к практической работе**

В схеме последовательно – параллельного соединения заданы напряжение цепи синусоидального тока и сопротивления элементов схемы.

Начертить схему цепи, включая те элементы, численные значения которых заданы в таблице по Вашему варианту.

Определить с помощью метода комплексных чисел значения всех токов I, $I_1$, $I_2$, напряжений $U_0$, $U_{12}$; активную P, реактивную Q и полную S мощности цепи, коэффициент мощности cos φ.

Построить векторную диаграмму токов и напряжений в масштабах на комплексной плоскости (по комплексам напряжений U, $U_0$, $U_{12}$ и комплексам токов I, $I_1$, $I_2$).



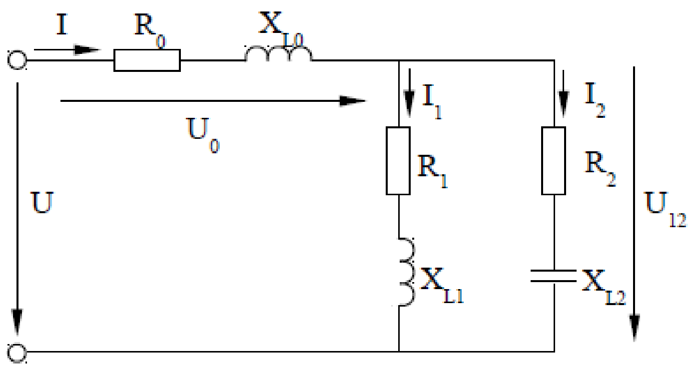
| № вар. | U, В | $R_0$, Ом | $X_{L0}$, Ом | $X_{C0}$, Ом | $R_1$, Ом | $X_{L1}$, Ом | $X_{C1}$, Ом | $R_2$, Ом | $X_{L2}$, Ом | $X_{C2}$, Ом |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 60 | 5 | 5 | 0 | 8 | 0 | 6 | 6 | 8 | 0 |
| **2** | 130 | 10 | 0 | 0 | 6 | 8 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| **3** | 85 | 5 | 0 | 0 | 4 | 3 | 6 | 0 | 5 | 0 |
| **4** | 130 | 0 | 0 | 5 | 3 | 7 | 3 | 5 | 0 | 0 |
| **5** | 185 | 5 | 0 | 40 | 20 | 40 | 0 | 20 | 0 | 40 |
| **6** | 100 | 5 | 5 | 0 | 6 | 0 | 8 | 8 | 6 | 0 |
| **7** | 130 | 3 | 4 | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| **8** | 125 | 0 | 50 | 0 | 30 | 80 | 40 | 0 | 0 | 50 |
| **9** | 200 | 3,2 | 17,6 | 0 | 16 | 12 | 0 | 8 | 14 | 20 |
| **10** | 125 | 11,6 | 0 | 13,8 | 10 | 10 | 0 | 30 | 10 | 50 |
| **11** | 120 | 12 | 8 | 0 | 16 | 0 | 14 | 18 | 12 | 0 |
| **12** | 280 | 24 | 0 | 0 | 12 | 18 | 0 | 0 | 0 | 26 |
| **13** | 170 | 10 | 0 | 0 | 9,6 | 12,2 | 8 | 0 | 14 | 0 |
| **14** | 260 | 0 | 0 | 10 | 15 | 5 | 16 | 10 | 0 | 0 |
| **15** | 270 | 10 | 0 | 30 | 60 | 80 | 0 | 25 | 0 | 35 |
| **16** | 300 | 24 | 12 | 0 | 32 | 0 | 28 | 20 | 20 | 0 |
| **17** | 390 | 9 | 9 | 0 | 0 | 0 | 5 | 10 | 12 | 0 |
| **18** | 250 | 0 | 75 | 0 | 55 | 90 | 45 | 0 | 0 | 30 |
| **19** | 500 | 18 | 0 | 22 | 20,8 | 24,6 | 0 | 20 | 50 | 30 |
| **20** | 400 | 34,2 | 6,6 | 0 | 24 | 36 | 0 | 26 | 16 | 38 |
| **21** | 180 | 18 | 20 | 0 | 16 | 0 | 22 | 20 | 24 | 0 |
| **22** | 380 | 32 | 0 | 0 | 22,5 | 26,5 | 0 | 0 | 0 | 30 |
| **23** | 255 | 15 | 0 | 0 | 10 | 13 | 19 | 0 | 17 | 0 |
| **24** | 400 | 0 | 0 | 22 | 16 | 24 | 18 | 8 | 0 | 0 |
| **25** | 90 | 10 | 0 | 26 | 34 | 26 | 0 | 16 | 0 | 12 |
| **26** | 200 | 14 | 21 | 0 | 13 | 0 | 13 | 19 | 15 | 0 |
| **27** | 260 | 12 | 9 | 0 | 0 | 0 | 16 | 7 | 7 | 0 |
| **28** | 370 | 0 | 80 | 0 | 90,2 | 120,6 | 60 | 0 | 0 | 80 |
| **29** | 345 | 12 | 0 | 16 | 16,6 | 14,4 | 0 | 18 | 35 | 14 |
| **30** | 295 | 17 | 4,4 | 0 | 19 | 16,2 | 0 | 15 | 9 | 22 |

**Пример :**

Цепь переменного тока состоит из последовательно – параллельного соединения элементов. В первую параллельную ветвь включены последовательно активное и
индуктивное сопротивления: R1=10 Ом, XL1=20 Ом. Во вторую параллельную ветвь включены последовательно активное и емкостное сопротивления: R2=10 Ом, XC2=20 Ом. В последовательный участок цепи включены последовательно активное и индуктивное сопротивления: R0=5 Ом, XL0=40 Ом. Напряжение на зажимах цепи U=100 В.

Определить комплексным методом токи в параллельных ветвях I1, I2 и ток I в неразветвленной части цепи; полную S, активную P и реактивную Q мощности и коэффициент мощности cos φ.

Построить векторную диаграмму напряжений и токов на комплексной плоскости,
используя масштабы MU=10 В/см и MI=0,4 А/см.




Дано:
$R_1$=10 Ом;
$X_{L1}$=20 Ом;
$R_2$=10 Ом;
$X_{C2}$=20 Ом;
$R_0$=5 Ом;
$X_{L0}$=40 Ом;
U=100 В;
$M_U$=10 В/см;
$M_I$=0,4 А/см.
Определить: $I_1$, $I_2$, I, S, P, Q, cosφ.
Решение.
1 Комплексы полных сопротивлений параллельных ветвей:

$$\underline{Z_1} = R_1 + jX_{L1} = (10 + j20)\ Ом = 22.36e^{+j63.4^\circ}\ Ом;$$

$$\underline{Z_2} = R_2 - jX_{C2} = (10 - j20)\ Ом = 22.36e^{-j63.4^\circ}\ Ом.$$

2 Комплекс полного сопротивления последовательного участка цепи:

$$\underline{Z_0} = R_0 + jX_{L0} = (5 + j40)\ Ом = 40{,}3e^{+j82.9^\circ}\ Ом.$$

3 Комплекс полного сопротивления параллельного участка цепи:

$$\underline{Z_{12}} = \frac{\underline{Z_1} \cdot \underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} = \frac{22.36e^{j63.4^\circ} \cdot 22.36e^{-j63.4^\circ}}{10 + j20 + 10 - j20} = \frac{500}{20} = 25\ Ом.$$

4 Комплекс полного сопротивления всей цепи:

$$\underline{Z} = \underline{Z_0} + \underline{Z_{12}} = 5 + j40 + 25 = 30 + j40 = 50e^{j53.13^\circ}\ Ом.$$
5 Комплекс напряжения цепи.

Принимаем, что вектор напряжения будет исходным, совпадающим с положительным
направлением действительной оси. Тогда:

$$\overline{U} = U = 100\ В.$$
6 Комплекс тока в неразветвленной части цепи определяем по закону Ома:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{50e^{j53.13^\circ}} = 2e^{-j53.13^\circ} = (1.2 - j1.6)\ А$$
7 Действующее значение общего тока равно модулю его комплексного выражения:

$$I=2\ А.$$
8 Напряжение на последовательном участке цепи, т. е. на сопротивлении $Z_0$.

$$\dot{U}_0 = \dot{I}\cdot\underline{Z_0} = 2e^{-j53.13^\circ}\cdot 40.3e^{j82.9^\circ} = 80.6e^{j29.77^\circ}\ В = (70 + j40)\ В.$$
9 Напряжение на параллельном участке цепи:

$$\dot{U}_{12} = \dot{U} - \dot{U}_0 = 100 - 70 - j40 = (30 - j40)\ В = 50e^{-j53.13^\circ}\ В \text{ или}$$
$$\dot{U}_{12} = \dot{I}\cdot Z_{12} = 2e^{-j53.13^\circ}\cdot 25 = 50e^{-j53.13^\circ}\ В = (30 - j40)\ В$$
10 Комплексы токов параллельных ветвей по закону Ома:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_{12}}{\underline{Z_1}} = \frac{50e^{-j53.13^\circ}}{22.36e^{j63.4^\circ}} = 2.24e^{-j116.53^\circ} = -2.24e^{j(180^\circ-116.53^\circ)} = -2.24e^{j63.4^\circ}\ А = (-1 - j2)\ А;$$
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{12}}{\underline{Z_2}} = \frac{50e^{-j53.13^\circ}}{22.36e^{-j63.4^\circ}} = 2.24e^{j10.27^\circ}\ А = (2.2 + j0.4)\ А.$$
11 Проверить вычисление комплексов токов можно по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2;\ 1.2 - j1.6 = -1 - j2 + 2.2 + j0.4;\ (1.2 - j1.6)\ А = (1.2 - j1.6)\ А.$$
Вычисления выполнены верно.

12 Действующие значения токов ветвей равны соответственно модулям их комплексных
выражений:

$$I_1=2.24\ А;\ I_2=2.24\ А.$$
13 Комплекс полной мощности определяется как произведение комплекса напряжения и
сопряженного комплекса тока:

$$\dot{S} = \dot{U}\cdot\dot{I}^* = 100\cdot 2e^{j53.13^\circ} = 200e^{j53.13^\circ}\ ВА = (120 + j160)\ ВА;$$
т. к. $\dot{S} = P \pm jQ$, то
активная мощность P=120 Вт;
реактивная мощность Q=160 вар;
полная мощность – модуль комплекса $\dot{S}$ - S=200 ВА.

14 Построение векторной диаграммы легче выполнить на комплексной плоскости,
используя алгебраическое выражение токов и напряжений и соотношения:
$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$; $\dot{U} = \dot{U}_0 + \dot{U}_{12}$, в заданных масштабах $M_U$=10 В/см и $M_I$=0,4 А/см.

Векторная диаграмма построена на рисунке.
Координаты концов векторов: $\overline{U}$ (10; 0); $\overline{U_0}$ (7; 4); $\overline{U}_{12}$ (3; -j4);
$\overline{I}_1$ (-2.5; -j5); $\overline{I}_2$ (5.5; j1); $\overline{I}$ (3; -j4).

# Практическая работа №3

## Тема «Вычисление определителей II и III порядка»

**Цель:** закрепления навыка выполнения элементарных преобразований над матрицами, нахождение определителя матриц.

## Теоретические сведения к практической работе

Для определителей второго и третьего порядка существуют рациональные способы их вычислений.

### Вычисления определителей второго порядка

Чтобы вычислить определитель матрицы $A$ второго порядка, надо от произведения элементов главной диагонали отнять произведение элементов побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

**Пример** Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

**Решение.** $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 55 + 14 = 69$

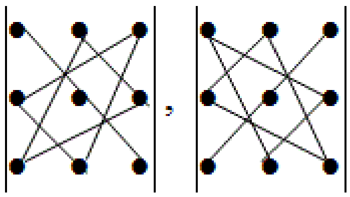
**Ответ.** $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 69$

**Методы вычисления определителей третьего порядка**

Для вычисления определителей третьего порядка существует такие правила.

**Правило треугольника**

Схематически это правило можно изобразить следующим образом:



«+» «–»

Произведение элементов в первом определителе, которые соединены прямыми, берется со знаком "плюс"; аналогично, для второго определителя - соответствующие произведения берутся со знаком "минус", т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

**Пример**

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ методом треугольников.

**Решение.** $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-2)+4\cdot(-2)\cdot(-1)+$

$$+3\cdot 3\cdot 1-(-1)\cdot 1\cdot 1-3\cdot(-2)\cdot 3-4\cdot 3\cdot(-2)=54$$

**Ответ.** $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

Пример 3. Найти алгебраические дополнения элементов $a_{13}, a_{32}, a_{12}$ определителя $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ -7 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$A_{13} = +M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 0\cdot 5 - 9\cdot(-7) = 0+63 = 63$$

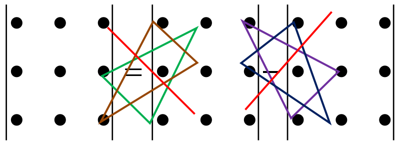
$$A_{32} = -M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -((-1)\cdot 6 - 3\cdot 0) = -(-6-0) = 6$$

$$A_{12} = -M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -(0\cdot(-3) - 6\cdot(-7)) = -(0+42) = -42 .$$

Пример 4. Найти матрицу $A^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение.

1. Вычислим определитель матрицы A (по правилу треугольников):



+ −

$/A/ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 6+0+0-0-1-0 = 5$, так как определитель det=5≠0, то матрица A невырожденная и имеет обратную матрицу $A^{-1}$.

2. Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ .

Знаки алгебраического дополнения $A_{ij}$: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$A_{11} = +M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ $\quad A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$A_{13} = +M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{22} = +M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$$A_{31} = +M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

3. Подставляя найденные значения в формулу для $A^{-1}$ получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{/A/} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

№1. Вычислите определить:

а) второго порядка

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ 8 $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

.

б) третьего порядка

1. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Задание № 2. Найти алгебраические дополнения элементов $a_{13}, a_{32}, a_{12}$ определителя

1. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Задание №3. Найти матрицу $A^{-1}$, если

1.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 3.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 4.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 5.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 7.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 8.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 9.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

10.$\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

**Практическая работа №4**

**Тема: «Построение графа по условиям ситуационных задач»**

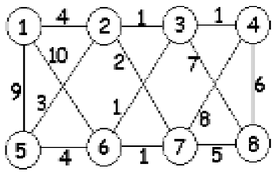
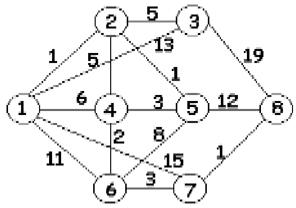
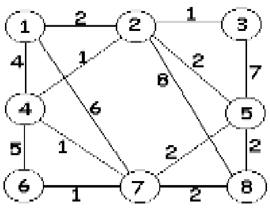
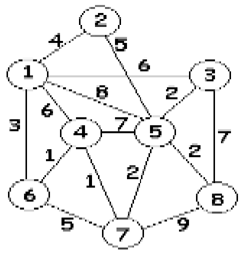
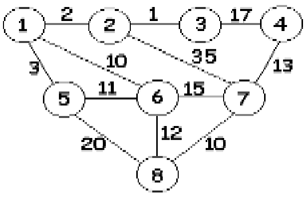
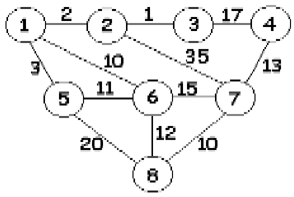
**Цель работы:** Закрепить и систематизировать знания по теме: «Основы дискретной математики».

**Задание: Выполните задание по теме: Граф и его элементы.**

**А) Запишите количество ребер и вершин графа;**

**В) Определить кратчайший путь из вершины 1 в вершину 8 для графа, представленного на рисунке;**

**С) Запишите номера вершин, имеющих одинаковую степень:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. |  | 4. |  |
| 2. |  | 5. |  |
| 3. |  | 6. |  |

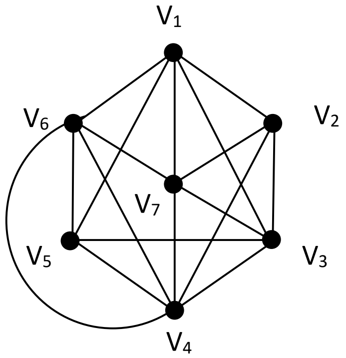
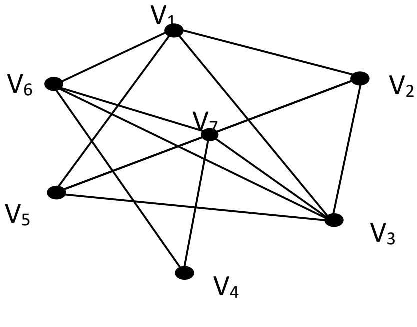
**Задание: Выполните задание по теме: Граф и его элементы.**

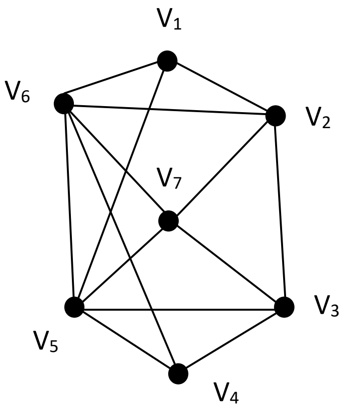
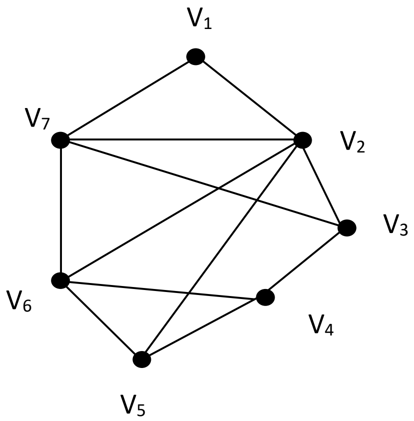
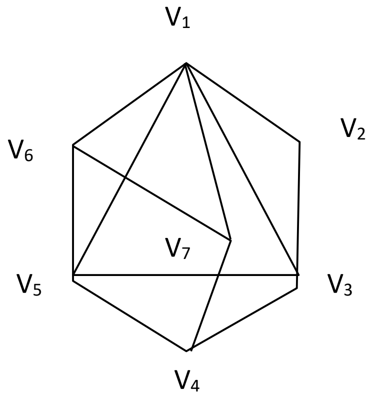
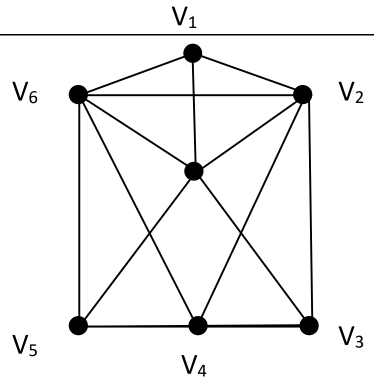
**Граф задан диаграммой.**

**А) Составьте маршруты длины 5 из вершины$V_2$ в вершину $V_5$. Составьте простую цепь, соединяющую эти вершины.**

**В) Постройте простой цикл, содержащий вершину $V_4$.**

**С) Определите вид заданного графа**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. |  | 10. |  |
| 8. | | 11. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| |  | |  |
| 9. |  | 12. |  |

**Задание: Выполните задание по теме: Понятие дерева в теории графов:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13. | Сколько различных способов обедов можно выбрать в вагоне-ресторане, если бы на каждый обед выбирать одно холодное блюдо, одно первое, одно второе, одно третье? В меню на этот раз были выставлены студень, красная икра, свежепосоленная рыба; на первое – уха из стерляди, щи с грибами; на второе – осетрина жаренная, теленок жареный на вертеле; на третье – арбузы, груши. | 16. | Перечислите все возможные сочетания деловой одежды, если у вас в гардеробе брючный костюм черного цвета, белая и голубая блузки, синяя юбка и серый джемпер. |
| 14. | Изобразите дерево возможных исходов при троекратном бросании монеты. | 17. | Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 5×10 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски? |
| 15. | Нарисуйте граф с семью вершинами, в котором для любых двух вершин существует только один связывающий их путь. | 18. | Рассади участников «Большой восьмерки» за круглым столом всеми возможными способами. |

**Задание: Графы и логические задачи:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. | В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. | 22. | Какое наименьшее число переливаний необходимо для |

Известно, что:

Вода и молоко не в бутылке.

Сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом.

В банке не лимонад и не вода.

Стакан стоит между банкой и сосудом с молоком.

В каком сосуде находится, какая из жидкостей?

того, чтобы с помощью 7-и 11-литровых сосудов и крана с водой отмерить 2 литра?

20. На улице, встав в кружок, беседуют Аня, Валя, Галя и Надя.
Девочка в зеленом платье – не Аня и не Валя – стоит между девочкой в голубом платье и Надей.

Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом и Валей. Какого цвета платье у каждой из девочек?

23. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13 и 15 лет. Зовут их Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори, а сумма лет Ани и Веры делится на три?

21. В Артеке за круглым столом оказалось пятеро ребят из Москвы, Санкт-Петербурга, Новгорода, Перми и Томска: Юра, Толя, Алеша, Коля и Витя. Москвич сидел между Томичем и Витей, санкт-петербуржец – между Юрой и Толей, а напротив него сидел пермяк и Алеша. Коля никогда не был в Санкт-Петербурге, Юра не бывал в Москве и Томске, а Томич с Толей регулярно переписываются. Определите, кто в каком городе живет.

24. Беседуют трое друзей – Белокуров, Рыжов и Чернов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас – блондин, другой – брюнет, третий – рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос у каждого из друзей?

**Задание: Выполните задание по теме: Сетевые графы: В таблице приведена стоимость перевозок между соседними железнодорожными станциями. Числа, стоящие на пересечениях строк и столбцов означают стоимость проезда между соответствующими соседними станциями. Если пересечение строки и столбца пусто, то станции не являются соседними. Укажите схему, соответствующую таблице.**

25.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 5 | | | | |
| B | 5 | | 9 | 3 | 8 | |
| C | | 9 | | | 4 | |
| D | | 3 | | | 2 | |
| E | | 8 | 4 | 2 | | 7 |
| F | | | | | 7 | |

28.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 2 | | | | |
| B | 2 | | 3 | 2 | 3 | |
| C | | 3 | | | 2 | |
| D | | 2 | | | 1 | |
| E | | 3 | 2 | 1 | | 6 |
| F | | | | | 6 | |

26.

| | **A** | **B** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|

29.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **A** | | 4 | | 5 |
| **B** | 4 | | 3 | 6 |
| **C** | | 3 | | |
| **D** | 5 | 6 | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | 4 | | | | |
| B | 4 | | 6 | 3 | 6 | |
| C | | 6 | | | 4 | |
| D | | 3 | | | 2 | |
| E | | 6 | 4 | 2 | | 5 |
| F | | | | | 5 | |

27.

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | | 1 | 4 | | 1 |
| **B** | 1 | | | 3 | |
| **C** | 4 | | | | 2 |
| **D** | | 3 | | | |
| **E** | 1 | | 2 | | |

30.

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | | 3 | 1 | |
| B | | | 4 | | 1 |
| C | 3 | 4 | | | 2 |
| D | 1 | | | | |
| E | | 1 | | | |

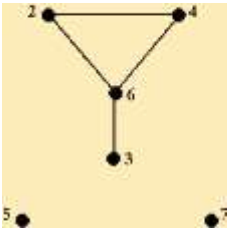
**Пояснения к работе:**

**Необходимые формулы:**

**Граф-** это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек. Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются **смежными**.

Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется **ориентированным графом**.

Если ребра не имеют ориентации, граф называется **неориентированным.**




**Петля-** это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

**Простой граф-** граф без кратных ребер и петель.

**Степень вершины-** это удвоенное количество петель, находящихся у этой вершины плюс количество остальных прилегающих к ней ребер.

**Пустым** называется граф без ребер.

**Полным** называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

**Путь в ориентированном графе** — это последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

**Маршрут** в графе путь, ориентацией дуг которого можно пренебречь.

**Цепь-** маршрут, в котором все ребра попарно различны.

**Цикл-** замкнутый маршрут, являющийся цепью.

Граф называется **связным**, если любая пара его вершин связана.

**Дерево** — это связный граф без циклов.

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение графа.

2. Сформулируйте понятие смежных ребер.

3. Дайте определение правильного графа.
4. Запишите формулу суммы степеней графа.
5. Дайте определение изолированной вершины графа.

**Практическая работа № 5**

**Тема: «Вычисление пределов функции в точке»**

**Цель:** сформировать умение находить пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

**Теоретические сведения к практической работе.**

Число $A$ называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от , такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ ($c$=const).

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$, то:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

*Первый замечательный предел*: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

*Второй замечательный предел* (число $e$ = 2,718…):

$$\lim_{x \to \infty} (1 + 1/x)^x = e \text{ или } \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

*Замечательные пределы:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Примеры решения:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1}=\frac{-6}{2}=-3$$

**Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию**

## 1)Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

**1) деление на х в старшей степени:**

Пример 1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}\quad\frac{\infty}{\infty}$$

Сначала мы смотрим на числитель и находим $x$ в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим $x$ в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на $x$ в старшей степени**.

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$ Разделим числитель и знаменатель на $x^2$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Пример 2:

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Снова в числителе и знаменателе находим $x$ в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень в числителе: 3

Максимальная степень в знаменателе: 4

Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.

Разделим числитель и знаменатель на $x^4$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}^{\to 0}+\dfrac{15}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{9}{x^3}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\dfrac{6}{x^2}^{\to 0}-\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}-\dfrac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

Пример 3

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$

Разделим числитель и знаменатель на $x^2$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

## 2. Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

**1) разложение числителя и знаменателя на множители.**

Пример 4

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$2x^2-3x-5=0$

Сначала находим дискриминант:

$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$ Далее находим корни:

$x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$ $x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ Таким образом:

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$(*) = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = (*)$ можно сократить на $(x+1)$:

$(*) = \lim\limits_{x\to -1}(2x-5) = (*)$ Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела: $= 2\cdot(-1)-5 = -2-5 = -7$

$$(*) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(2x-5) = -2-5 = -7$$

**2) умножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение.**

Пример 5

Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$

**Умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение**:

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

Применяем вверху формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})} = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15} = (*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе:

$$(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

Решение  данного примера в чистовом варианте выглядит так:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(x-3)} =$$

$$= \frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}$$

**3) использование 1-го замечательного предела**

Пример 6

Найти предел

Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$.В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом 7х, значит, в знаменателе тоже нужно получить 7х».

А делается это очень просто:

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\to 1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

Пример 7

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\underset{\to 1}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\underset{\to 1}{\sin\frac{x}{2}}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Пример 8

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

Пример 9

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

Пример 10

Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}=\frac{\infty\cdot 0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^{\to 1}\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x^{\to 0}+5)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot 3x\cdot 3x\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{5}$$

## *Второй замечательный предел*

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

***Справка:*** $e=2{,}718281828\ldots$ ***– это иррациональное число.***

В качестве параметра $\alpha$ может выступать не только переменная $x$, но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

Пример 11

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha=3x$, значит, в показателе тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

страшная степень превратилась в симпатичную букву $e$:

**При этом сам значок предела перемещаем в показатель**:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{e\ \text{(2-ой замечательный предел)}}\Bigg)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

**Задания для практической работы.**

1. **Вычислить пределы функции:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-5x+1}{8x^2-9x+1} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-9x}{6x^3-x+1} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{5x^4+1}{8x^2-11x+1}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3\sqrt{x}}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{3x^2-13x+4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^3-x^2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$$

2. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{7x}{tg2x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{5x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{\sin 2x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{tg9x} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{5}{7x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

**Практическая работа №6**

**Тема: Решение прикладных задач на определение производной**

**Цель работы:** Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Дифференциальное и интегральное исчисление».

**Задание: Решить задачу на физический смысл производной:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t$ = 9 с. | 4. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с? |
| 2. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-t^4+6t^3+5t+23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t=3$ с. | 5. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-3t-29$ (где $x$ —расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t$ = 3 с. |
| 3. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^3-3t^2+2t$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t$ = 6 с. | 6. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=-\frac{1}{3}t^3+2t^2+5t+13$ (где $x$ — расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t$ = 3 с. |

**Задание: Решить задачу на геометрический смысл производной:**

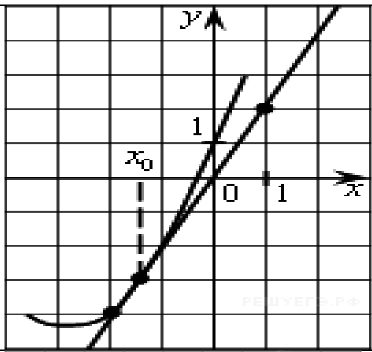
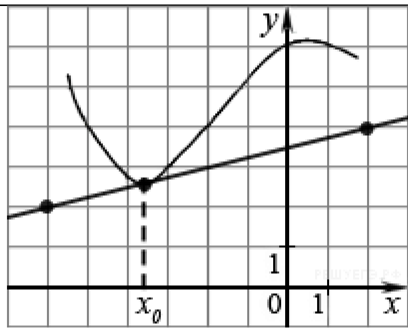
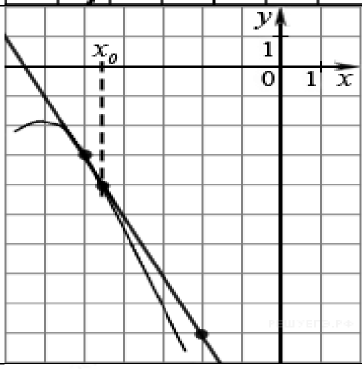
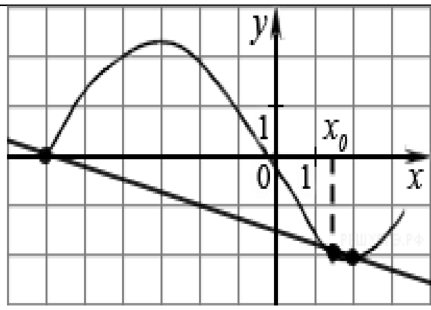
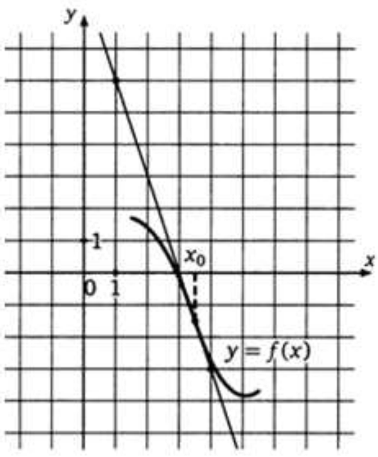
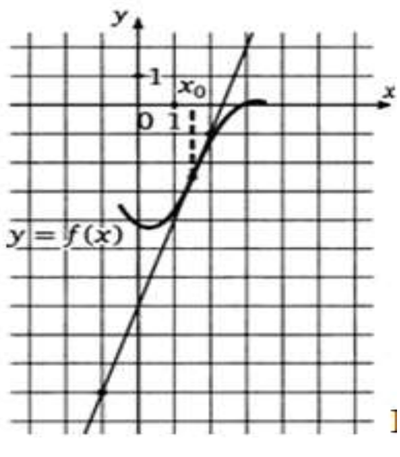
| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$. Найдите абсциссу точки касания. | 10. | Прямая $y=3x+1$ является касательной к графику функции $ax^2+2x+3$. Найдите $a$. |
| 8. | Прямая $y=-4x-11$ является касательной к графику функции $y=x^3+7x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания. | 11. | Прямая $y=-5x+8$ является касательной к графику функции $28x^2+bx+15$. Найдите $b$, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0. |
| 9. | Прямая $y=5x-3$ является касательной к графику функции $9x^2+bx+13$. Найдите $b$, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0. | 12. | Прямая $y=3x+4$ является касательной к графику функции $3x^2-3x+c$. Найдите $c$. |

**Задание: Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13. | $y=6x-\frac{2}{x}$ в его точке с абсциссой равной -1. | 16. | $y(x)=4x^3-12x+5$ в его точке с абсциссой равной 4. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14. | $y = 4\text{-}x^2$ в его точке с абсциссой равной -6. | 17. | $f(x)=(x-6)(x2+6x+36)$ в его точке с абсциссой равной 1. |
| 15. | $y = -\frac{4}{x}$ в его точке с абсциссой равной -2. | 18. | $y = \frac{x^4}{4}$ его точке с абсциссой равной 3. |

**Задание: На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке $x_0$.:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. |  | 22. |  |
| 20. |  | 23. |  |
| 21. |  | 24. |  |

**Задание: Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:**

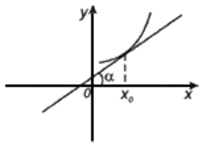
| | | | |
|---|---|---|---|
| 25. | $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2;$ [– 2; 2] | 28. | $f(x) = 9 - 6x^2 - x^3$ [– 4; 2]; |
| 26. | $y = 9x + 3x^2 - x^3;$ [– 2; 2] | 29. | $y = 4 - 9x + 3x^2 + x^3$ [– 2; 2] |
| 27. | $y = 5 + x^4 - 8x$ [– 3 ; 2] | 30. | $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ [– 4; 3] |

**Пояснения к работе:**

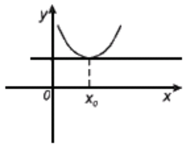
**Необходимые формулы:**

**Геометрический смысл производной:**

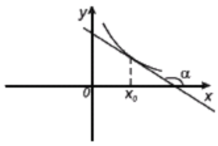
Производная в точке $x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции *y=f(x)* в этой точке.




$f'(x_0) = tg\alpha > 0$




$f'(x_0) = tg\alpha = 0$




$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

**Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке $x_0$** :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

**Физический смысл производной:**

Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$

**Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции**:

1.Находим ОДЗ функции.

2. Находим производную функции

3. Приравниваем производную к нулю

4. Находим промежутки, на которых производная сохраняет знак, и по ним определяем промежутки возрастания и убывания функции: Если на промежутке производная функции >0, то функция возрастает на этом промежутке. Если на промежутке производная функции <0, то функция убывает на этом промежутке.

5. Находим точки максимума и минимума функции. В точке максимума функции производная меняет знак с "+" на "-". В точке минимума функции производная меняет знак с "-" на "+".

6. Находим значение функции в концах отрезка, затем сравниваем значение функции в концах отрезка и в точках максимума, и выбираем из них наибольшее, если нужно найти наибольшее значение функции или сравниваем значение функции в концах отрезка и в точках минимума, и выбираем из них наименьшее, если нужно найти наименьшее значение функции.

**Контрольные вопросы:**

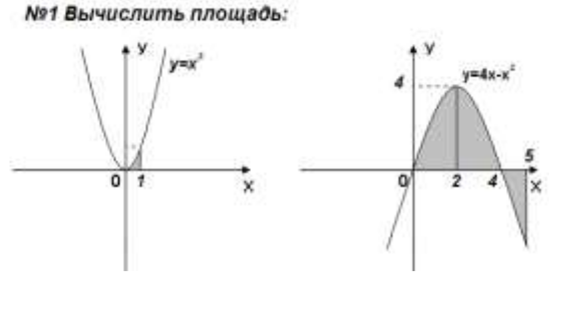
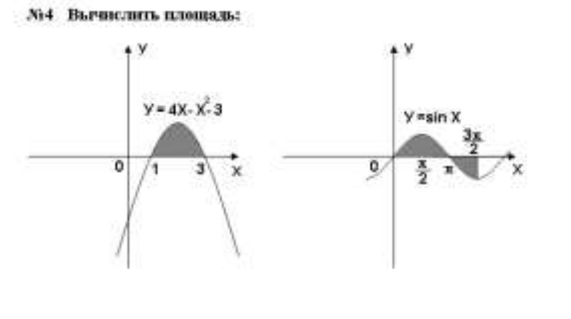
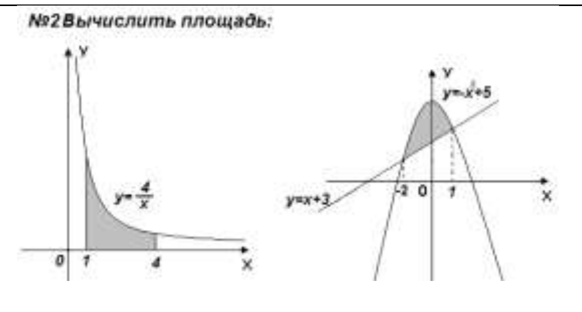
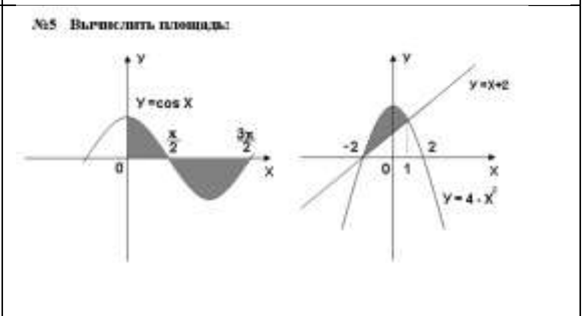
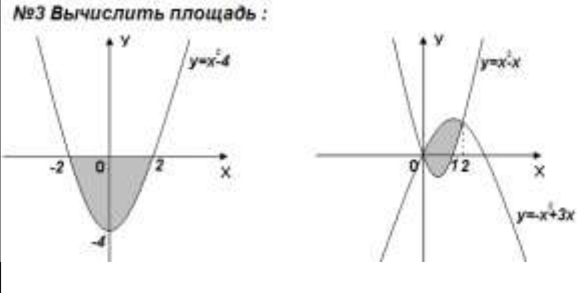
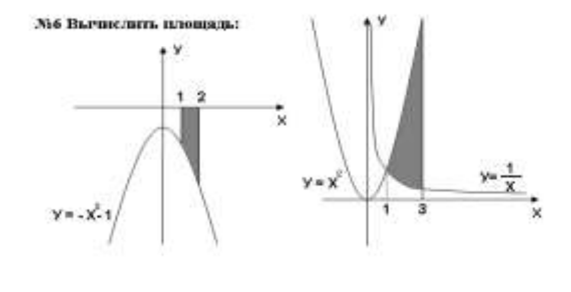
1. Запишите алгоритм исследования графика функции.
2. Дайте определение касательной к графику функции.
3. Сформулируйте алгоритм составления уравнения касательной к графику функции.
4. Запишите алгоритм исследования непрерывной функции на монотонность и экстремумы.
5. Запишите алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке [*а; в*].

## Практическая работа №7

**Тема:** «Решение задач на вычисление интегралов»

**Цель работы:** Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Дифференциальное и интегральное исчисление».

**Задание: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. |  | 4. |  |
| 2. |  | 5. |  |
| 3. |  | 6. |  |

**Задание: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | $y = x^3, x = -2, x = 1, y = 0.$ | 10. | $y = x + 3, y = x^2 + 1.$ |
| 8. | $y = 2x - x^2, y = x.$ | 11. | $y = x^2, x = 1, x = 3, y = 0.$ |
| 9. | $x = \sqrt{y}, y = 1, y = 4, x = 0.$ | 12. | $y = \frac{1}{2}x^2, y = 4 - x.$ |

**Задание**: **Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13. | $y = -x^2 + 8x - 16;$<br>$y = x^2 - 4x.$ | 16. | $y = -1{,}5x^2 + 9x - 7{,}5,$<br>$y = -x^2 + 6x - 5$ |
| 14. | $y = x^2,$<br>$y = 2 - x^2$ | 17. | $y = x^2 - 4x + 6,$<br>$y = 4x - x^2.$ |
| 15. | $y = - x^2 + 2x + 3;$<br>$y = x^2 - 6x - 7.$ | 18. | $y = x^2 - 2x + 2;$<br>$y = -x^2 + 4x + 2.$ |

**Задание: Вычислить объем тела:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. | Полученного при вращении вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$, прямыми $x = 3, x$=12 и осью абсцисс. | 22. | Полученного при вращении вокруг оси *Oy* трапеции, образованной прямыми $y = 3x, y = 2,$ y=4 и осью ординат. |
| 20. | Образованного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$ и отрезком $0 \leq y \leq 8$ оси ординат. | 23. | Образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | $0 \leq x \leq \pi$ оси абсцисс. |
| 21. | Полученного при вращении вокруг оси $Ox$ трапеции, образованной прямыми $y = 0{,}5x, x = 4, x$=6 и осью абсцисс. | 24. | Полученного отвращения кривой $y = \frac{x^2}{4}$ вокруг оси $Oy$ в пределах от $y = 1$, y=5. |

**Задание: Решить задачу:**

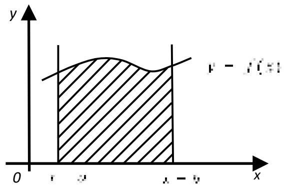
| | | | |
|---|---|---|---|
| 25. | Скорость движения поезда задается формулой $V(t) = 4t^3 - 2t + 1$ км/ч. Найти путь пройденный поездом за первые 4с от начала движения. | 28. | Скорость движения поезда задается формулой $V(t) = 3 + 3t^2$км/ч. Найти путь пройденный поездом за первые 4с от начала движения. |
| 26. | Найти путь, пройденный поездом за 10-ю секунду, зная, что скорость прямолинейного движения выражается формулой $V(t) = t^2 + 4t - 2$км/ч | 29. | Скорость движения поезда задается формулой $V(t) = 3t^2 + t + 1$км/ч. Найти путь пройденный поездом за первые 4с от начала движения. |
| 27. | Найти путь, пройденный поездом за 4-ю секунду, зная, что скорость прямолинейного движения выражается формулой $V(t) = 3t^2 - 2t - 3$км/ч | 30. | Скорость движения изменяется по закону $V(t) = 2t$ км/ч. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения. |

**Пояснения к работе:**

**Необходимые формулы:**

**Вычисление площадей плоских фигур**

Площадь криволинейной трапеции (рис.1) с основанием на оси ох вычисляется по формуле

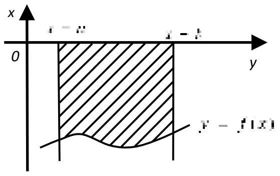


$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Рис. 1.

Если $f(x) < 0$, т.е. криволинейная трапеция расположена ниже оси ох (рис.2), то её площадь вычисляется по формуле

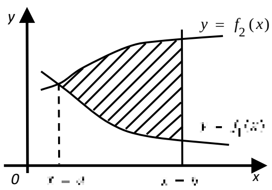
.



$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Рис. 2.

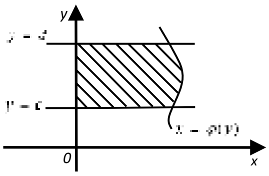
Если для всех $x \in [a;b]$выполняется условие $f_2(x) \geq f_1(x)$, т.е. $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$, то площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$ (рис.3), вычисляется по формуле



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Рис. 3.

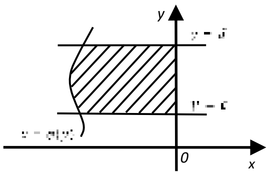
Площадь криволинейной трапеции с основанием на оси оу (рис.4) вычисляется по формуле:



$$S=\int_c^d \varphi(y)dy$$

Рис. 4.

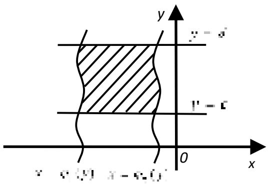
Если $\varphi(y)<0$, т.е. криволинейная трапеция расположена левее оси оу (рис.5), то её площадь вычисляют по формуле



$$S=-\int_c^d \varphi(y)dy$$

Рис. 5.

Если для всех $y\in[c;d]$ выполняется условие $\varphi_2(y)\ge\varphi_1(y)$, т.е. $\varphi_2(y)-\varphi_1(y)\ge 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками непрерывных функций $x=\varphi_2(y)$, $x=\varphi_1(y)$ и прямыми $y=c$, $y=d$, $c<d$ (рис.6), вычисляется по формуле



$$S=\int_c^d (\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy$$

Рис. 6.

**Вычисление объёмов тел вращения**

Объём тела, образованного вращением вокруг оси ох криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y=f(x)$, отрезком оси абсцисс $a\le x\le b$ и прямыми $x=a, x=b$, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx}\cdot$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси оу криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $x=\varphi(y)$, отрезком оси ординат $c\le y\le d$ и прямыми $y=c, y=d$, вычисляется по формуле $\boldsymbol{V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy}$

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение неопределенного интеграла.
2. Запишите основные правила интегрирования.
3. Дайте определение определенного интеграла.
4. Запишите основные свойства определенного интеграла.
5. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

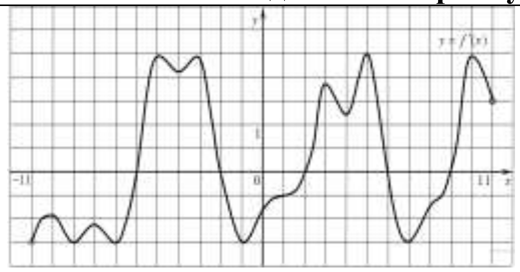
**Практическая работа №8**

**Тема: « Исследование графиков функций»**

**Цель работы:** Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Дифференциальное и интегральное исчисление».

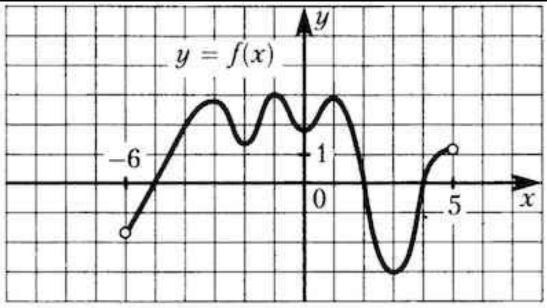
**Задание: Выполните задание по чертежу:**

<table>
<tr>
<td>1.</td>
<td>



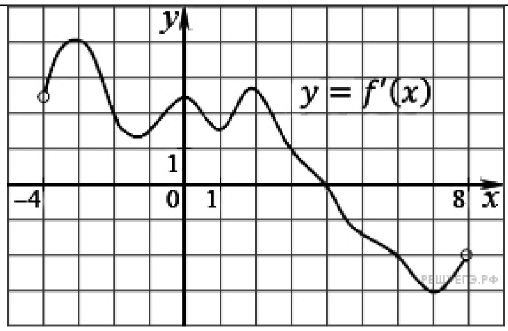
На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 11). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−10; 10].

</td>
<td>4.</td>
<td>



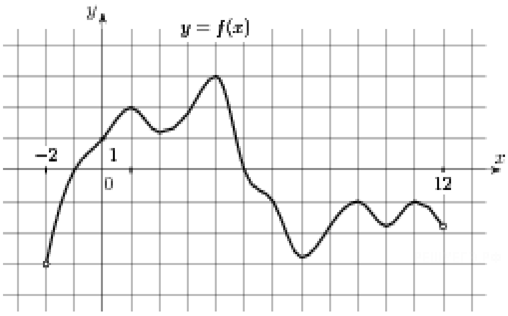

На рисунке изображен график функции *y = f (x)* , определенной на интервале (-6; 5). Найдите сумму точек экстремума функции *f (x)*.

</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>



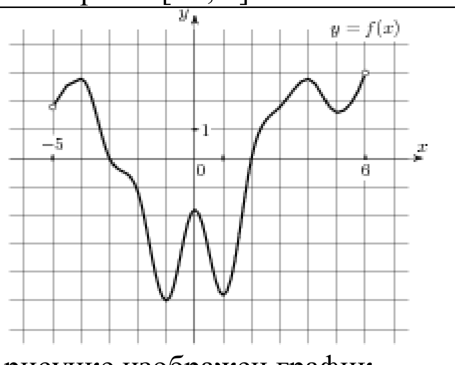

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−4; 8). Найдите точку экстремума функции *f(x)* на отрезке [−2; 6].

</td>
<td>5.</td>
<td>



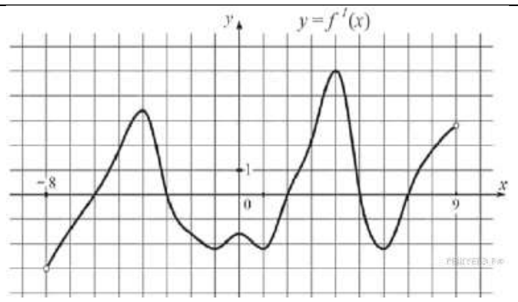

На рисунке изображен график функции *y = f(x)*, определенной на интервале (−2; 12). Найдите сумму точек экстремума функции *f(x).*

</td>
</tr>
<tr>
<td>3.</td>
<td>




На рисунке изображен график функции *y = f (x)*, определенной на интервале (-5; 6). Найдите сумму точек экстремума функции *f(x)*.

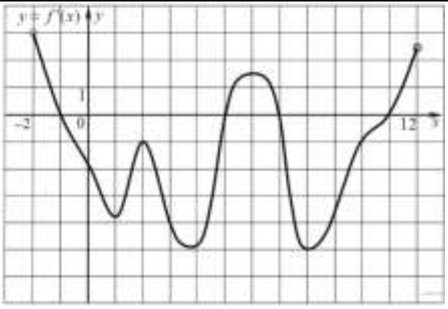
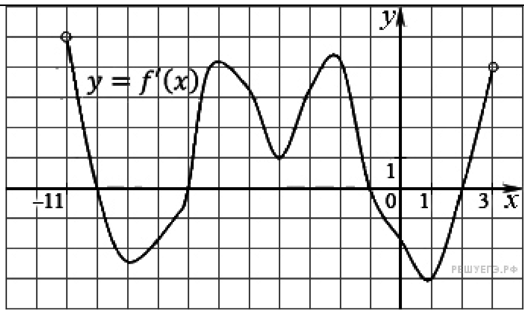
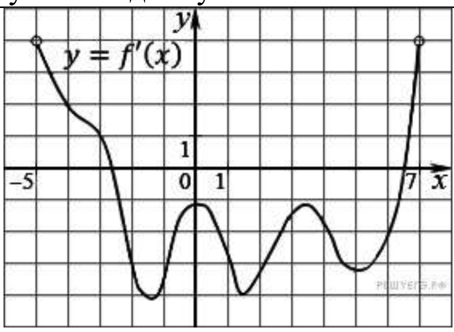
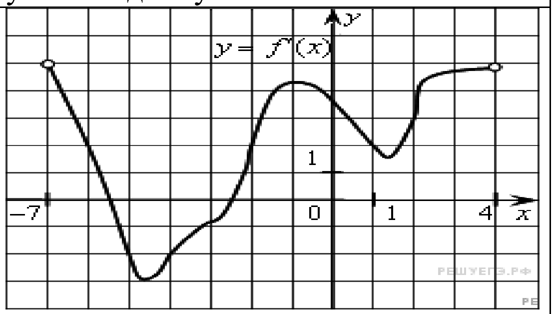
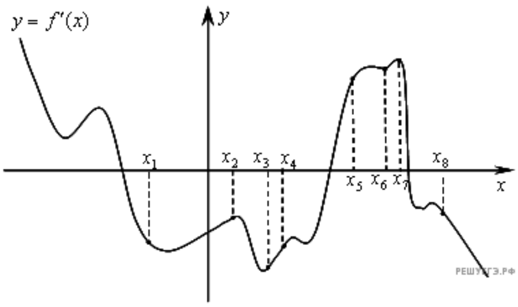
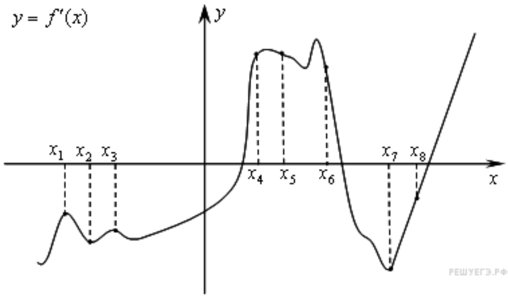
</td>
<td>6.</td>
<td>




На рисунке изображён график производной функции определенной на интервале (−8; 9). Найдите количество точек минимума *y = f (x)*, функции принадлежащих отрезку [−4; 8].

</td>
</tr>
</table>

**Задание: Выполните задание по чертежу:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | <br>На рисунке изображен график производной функции *f(x),* определенной на интервале (−2; 12). Найдите промежутки убывания функции *f(x).* В ответе укажите длину наибольшего из них. | 10. | <br>На рисунке изображен график производной функции *f(x),* определенной на интервале (−11; 3). Найдите промежутки возрастания функции *f(x).* В ответе укажите длину наибольшего из них. |
| 8. | <br>На рисунке изображен график производной функции *f(x),* определенной на интервале (−5; 7). Найдите промежутки убывания функции *f(x).* В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки. | 11. | <br>На рисунке изображен график производной функции *f(x),* определенной на интервале (−7; 4). Найдите промежутки возрастания функции *f(x).* В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки. |
| 9. | <br>На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В ответе укажите точки, в которых функция убывает. | 12. | <br>На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В ответе укажите точки, в которых функция возрастает. |

**Задание: Найти точки экстремума и определить их характер:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13. | $y=x^3+3x^2+4$ | 16. | $y=-\frac{1}{5}x^5+\frac{49}{3}x^3-\frac{3}{5}$ |
| 14. | $y=\frac{x^2}{1-x}$ | 17. | $y=(x+1)^2(3-x)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15. | $y=x^4-8x^2$ | 18. | $y=-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+18$ |

**Задание: Исследуйте на экстремум функцию:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. | $y=5-2\sqrt[3]{x^2}$ | 22. | $y=\sqrt[3]{x^2}(10-x)$ |
| 20. | $y=3\sqrt[3]{x^2}-x$ | 23. | $y=e^x+e^{-x}$ |
| 21. | $y=6\sqrt[3]{x^2}(x+1)$ | 24. | $y=x^2e^{-x}$ |

**Задание: Постройте график функции:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 25. | $f(x)=(x+1)^3(x-2)$ | 28. | $f(x)=4x^2\sqrt{1-4x}$ |
| 26. | $f(x)=\frac{x^2+5}{2-x}$ | 29. | $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$ |
| 27. | $f(x)=(x+2)^2(x-2)$ | 30. | $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$ |

**Пояснения к работе:**

**Необходимые формулы:**

**Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной**

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

   Помни: критическая точка $x_0$ есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой $x_0$, знак производной не меняется, то в точке $x_0$ функция экстремума не имеет.
6. Вычислить значения функции в точках экстремума.
7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

**Общая схема исследования функции**

1. Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций, остальные непериодические, пункт пропускается).
5. Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
6. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
7. Построить график функции.

**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение критической точкой функции.
2. Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
3. Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
4. Дайте определение точки перегиба функции.
5. Запишите определение точек экстремума функции.

## Практическая работа №10

**Тема: «Перевод целых, дробных и смешанных чисел из одной системы в другую»**

**Цель работы:** научиться переводить числа из одной системы счисления в другую.

### Краткие теоретические сведения. Примеры решения заданий.

**Система счисления** – это совокупность правил для обозначения и наименования чисел.

**Непозиционной** называется такая система счисления, в которой количественный эквивалент каждой цифры не зависит от ее положения (места, позиции) в записи числа.

**Основанием системы счисления** называется количество знаков или символов, используемых для изображения числа в данной системе счисления.

Наименование системы счисления соответствует ее основанию (например, десятичной называется система счисления так потому, что ее основание равно 10, т.е. используется десять цифр).

Система счисления называется **позиционной**, если значение цифры зависит от ее места (позиции) в записи числа.

### Системы счисления, используемые в компьютерах

Двоичная система счисления. Для записи чисел используются только две цифры – 0 и 1. Выбор двоичной системы объясняется тем, что электронные элементы, из которых строятся ЭВМ, могут находиться только в двух хорошо различимых состояниях. По существу эти элементы представляют собой выключатели. Как известно выключатель либо включен, либо выключен. Третьего не дано. Одно из состояний обозначается цифрой 1, другое – 0. Благодаря таким особенностям двоичная система стала стандартом при построении ЭВМ.

Восьмеричная система счисления. Для записи чисел используется восемь чисел 0,1,2,3,4,5,6,7.

Шестнадцатеричная система счисления. Для записи чисел в шестнадцатеричной системе необходимо располагать шестнадцатью символами, используемыми как цифры. В качестве первых десяти используются те же, что и в десятичной системе. Для обозначения остальных шести цифр (в десятичной они соответствуют числам 10,11,12,13,14,15) используются буквы латинского алфавита – A,B,C,D,E,F.

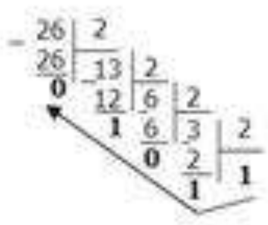
**Перевод чисел из одной системы счисления в другую.**

*Правило* перевода целых чисел из десятичной системы счисления в систему с основанием q:

1. Последовательно выполнять деление исходного числа и получаемых частных на q до тех пор, пока не получим частное, меньшее делителя.
2. Полученные при таком делении остатки – цифры числа в системе счисления q – записать в обратном порядке (снизу вверх).

*Пример 1.* Перевести $26_{10}$ в двоичную систему счисления. $A_{10}$->$A_2$

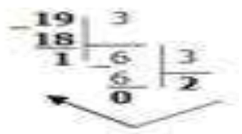
*Решение:*



*Ответ*: $26_{10}=11010_2$

*Пример 2.* Перевести $19_{10}$ в троичную систему счисления. $A_{10}$->$A_3$.

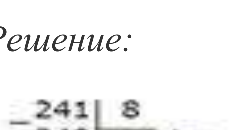
*Решение:*



*Ответ:* $19_{10}=201_3$.

*Пример 3.* Перевести $241_{10}$ в восьмеричную систему счисления. $A_{10}$->$A_8$

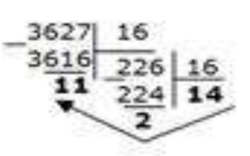
*Решение:*



*Ответ:* $241_{10}=361_8$.

*Пример4.* Перевести $3627_{10}$ в шестнадцатеричную систему счисления. $A_{10}$->$A_{16}$

Решение:




Т.к. в шестнадцатеричной системе счисления 14 – E, а 11 – B, то получаем ответ $E2B_{16}$.

Ответ: $3627_{10}$=$E2B_{16}$.

**<u>Перевод чисел из любой системы счисления в десятичную.</u>**

*Правило*: Для того чтобы число из любой системы счисления перевести в десятичную систему счисления, необходимо его представить в развернутом виде и произвести вычисления.

*Пример 5.* Перевести число $110110_2$ из двоичной системы счисления в десятичную.

*Решение:*

$110110_2 = 1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3+1*2^2+1*2^1+0*2^0=32+16+4+2=54_{10}$.

*Ответ:* $110110_2 = 54_{10}$.

*Пример 6.* Перевести число 101,012 из двоичной системы счисления в десятичную.

*Решение*:

$101{,}01_2 = 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0+0*2\text{-}^1+1*2^{-2} =4+0+1+0+0{,}25=5{,}25_{10}$.

*Ответ:* $101{,}01_2 = 5{,}25_{10}$.

*Пример 7.* Перевести число $122100_3$ из троичной системы счисления в десятичную.

*Решение:*

$12201_3=1*3^4 + 2*3^3 + 2*3^2 + 0*3^1 + 1*3^0 = 81+54+18+1 = 154_{10}$.

*Ответ*: $12201_3 = 154_{10}$.

*Пример 8*. Перевести число 1637 из семеричной системы счисления в десятичную.

Решение: 1637 = 1*72 + 6*71 + 3*70 = 49+42+3= 9410.

Ответ: 1637 = 9410.

*Пример 9*. Перевести число 2E16 в десятичную систему счисления.

*Решение:*

$2E_{16} = 2*16^1 +14*16^0 = 32 +14 = 46_{10}$.

*Ответ:* $2E_{16} = 46_{10}$.

## <u>Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления</u>

*<u>Перевод целых чисел.</u>*

*Правило:* Чтобы перевести целое двоичное число в восьмеричную ($8=2^3$) систему счисления необходимо:

1. разбить данное число справа налево на группы по 3 цифры в каждой;
2. рассмотреть каждую группу и записать ее соответствующей цифрой восьмеричной системы счисления.

*Пример 10.* Перевести число 111010102 в восьмеричную систему счисления.

*Решение:*

11 101 010

3 5 2

*Ответ:* $11101010_2 = 352_8$ .

*Пример 11.* Перевести число $11110000010110_2$ в восьмеричную систему счисления.

*Решение:*

111 110 000 010 110

7 6 0 2 6

Ответ: $11110000010110_2 = 76026_8$.

*Правило:* Чтобы перевести целое двоичное число в шестнадцатеричную ($16=2^4$) систему счисления необходимо:

разбить данное число справа налево на группы по 4 цифры в каждой;

рассмотреть каждую группу и записать ее соответствующей цифрой шестнадцатеричной системы счисления.

*Пример 12.* Перевести число 111000102 в шестнадцатеричную систему счисления.

*Решение:*

1110 0010

E 2

*Ответ:* $11100010_2 = E2_{16}$ .

**Перевод чисел из восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления в двоичную систему счисления.**

*Правило:* Для того, чтобы восьмеричное (шестнадцатеричное) число перевести в двоичную систему счисления, необходимо каждую цифру этого числа заменить соответствующим числом, состоящим из 3 (4) цифр двоичной системы счисления.

*Пример 13.* Перевести число $523_8$ перевести в двоичную систему счисления.

*Решение:*

5 2 3

101 010 011

*Ответ:* $523_8 = 101010011_2$.

*Пример 14.* Перевести число $4BA35_{16}$ перевести в двоичную систему счисления.

*Решение:*

4 B A 3 5

100 1011 1010 0011 0101

*Ответ:* $4BA35_{16} = 100\ 1011\ 1010\ 0011\ 0101_2$.

***3. Задание***

*Задание 1.* Переведите в десятичную систему счисления следующие числа из … системы счисления.

| № варианта | … двоичной | … восьмеричной | … шестнадцатеричной |
|---|---|---|---|
| 1 | 100011 | 220,7 | A9E,1 |
| 2 | 11011,01 | 35,6 | 15A |
| 3 | 101011 | 40,5 | 2FA |
| 4 | 111011.101 | 13,7 | 3C,1 |
| 5 | 110101 | 27,31 | 2FB |
| 6 | 101001,11 | 37,4 | 19,A |
| 7 | 100100,1 | 65,3 | 2F,A |
| 8 | 1011101 | 43,5 | 1C,4 |
| 9 | 101011,01 | 72,2 | AD,3 |
| 10 | 101101,110 | 30,1 | 38,B |

*Задание 2.* Переведите десятичные числа в заданные системы счисления.

| № варианта | в двоичную | в восьмеричную | в шестнадцатеричную |
|---|---|---|---|
| 1 | 36 | 197 | 681 |
| 2 | 197 | 984 | 598 |
| 3 | 84 | 996 | 368 |
| 4 | 63 | 899 | 435 |
| 5 | 96 | 769 | 367 |
| 6 | 99 | 397 | 769 |
| 7 | 98 | 435 | 899 |
| 8 | 69 | 368 | 996 |
| 9 | 397 | 598 | 984 |
| 10 | 435 | 681 | 197 |

*Задание 3.* Преобразуйте десятичные числа в двоичные и восьмеричные.

| № варианта | | № варианта | |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 327 | 6 | 265 |
| 2 | 259 | 7 | 411 |
| 3 | 428 | 8 | 409 |
| 4 | 431 | 9 | 356 |
| 5 | 146 | 10 | 507 |

*Задание 4.* Преобразуйте двоичные числа в восьмеричные и десятичные.

| № варианта | | № варианта | |
|---|---|---|---|
| 1 | 100000 | 6 | 1010101 |
| 2 | 100100 | 7 | 111001 |
| 3 | 101010 | 8 | 111100 |
| 4 | 110101 | 9 | 100111 |
| 5 | 100011 | 10 | 110010 |

*Задание 5.* Переведите в двоичную систему десятичные числа.

| № варианта | | № варианта | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,625 | 6 | 0,75 |
| 2 | 0,28125 | 7 | 7/16 |
| 3 | 0,078125 | 8 | 3/8 |
| 4 | 0,34375 | 9 | 1/4 |
| 5 | 0,25 | 10 | 0,515625 |

**Контрольные вопросы**

1. Что такое система счисления?
2. Что такое основание системы счисления?
3. Что такое непозиционная система счисления?
4. Что такое позиционная система счисления?
5. Из каких знаков состоит алфавит десятичной и двоичной систем?

6. Почему в вычислительной технике взята за основу двоичная система счисления?

7. Какое наибольшее десятичное число можно записать тремя цифрами:

   - в двоичной системе;
   - в восьмеричной системе;
   - в шестнадцатеричной системе?

**Практическая работа №11**

**Тема: «Вычисление математического ожидания и среднего квадратичного отклонения».**

**Цель работы:** Закрепить и систематизировать знания по теме «Основы теории вероятности и математической статистики».

**Задание: Случайная величина X задана законом распределения. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Построить многоугольник распределения:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\begin{array}{cccc} x_i & 2 & 3 & 10 \\ p_i & 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{array}$ | 4. | $\begin{array}{ccccc} x_i & 5 & 10 & 15 & 20 \\ p_i & 0,05 & 0,2 & 0,35 & 0,25 \end{array}$ |
| 2. | $\begin{array}{ccccc} x_i & -1 & 1 & 2 & 3 \\ p_i & 0,48 & 0,01 & 0,09 & 0,42 \end{array}$ | 5. | $\begin{array}{ccccc} x_i & 15 & 20 & 25 & 30 \\ p_i & 0,35 & 0,25 & 0,1 & 0,05 \end{array}$ |
| 3. | $\begin{array}{ccccc} x_i & -1 & 1 & 2 & 3 \\ p_i & 0,19 & 0,51 & 0,25 & 0,05 \end{array}$ | 6. | $\begin{array}{ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p_i & 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{array}$ |

**Задание: Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения. Построить многоугольник распределения.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | $\begin{array}{ccccc} x_i & 0,1 & 2 & 10 & 20 \\ p_i & 0,4 & 0,2 & 0,15 & 0,25 \end{array}$ | 10. | $\begin{array}{ccccc} x_i & 1 & 3 & 5 & 7 \\ p_i & 0,1 & 0,3 & 0,2 & 0,4 \end{array}$ |
| 8. | $\begin{array}{cccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ p_i & 0,0625 & 0,375 & 0,5625 \end{array}$ | 11. | $\begin{array}{ccccc} x_i & -3 & -1 & 0 & 2 \\ p_i & 0,1 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \end{array}$ |
| 9. | $\begin{array}{cccc} x_i & 2 & 4 & 8 \\ p_i & 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{array}$ | 12. | $\begin{array}{ccccc} x_i & 4 & 6 & 8 & 9 \\ p_i & 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,5 \end{array}$ |

**Задание: Задана функция распределения случайной величины X. Найти ее плотность распределения:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13. | $f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<0 \\ x^2 & при\ 0\le x\le 1 \\ 1 & при\ x>1 \end{cases}$ | 16. | $f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<2 \\ (x-2)^2 & при\ 2\le x\le 3 \\ 1 & при\ x>3 \end{cases}$ |
| 14. | $f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<0 \\ \dfrac{x^2-x}{2} & при\ 1\le x\le 2 \\ 1 & при\ x>2 \end{cases}$ | 17. | $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x}{8}, & 0<x\le 4, \\ 0, & x>4. \end{cases}$ |
| 15. | $f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<0 \\ 3x-x^2 & при\ 0\le x\le 3 \\ 0 & при\ x>1 \end{cases}$ | 18. | $f(x)=\begin{cases} 0, & если\ x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{32}, & если\ 1<x\le 9 \\ 0, & если\ x>9 \end{cases}$ |

**Задание**: **Случайная величина X задана плотностью распределения. Найти математическое ожидание:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. | $f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<0 \\ 4x-x^3 & при\ 0\le x\le 2 \\ 0 & при\ x>2 \end{cases}$ | 22. | $f_X(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 2x, & 0<x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20. | $\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{2} & \text{при} \quad 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$ | 23. | $F_2(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{x}{5} & \text{при} \quad 0\le x\le 5,\\ 1 & \text{при} \quad x>5.\end{cases}$ |
| 21. | $F_1(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{x}{3} & \text{при} \quad 0\le x\le 3,\\ 1 & \text{при} \quad x>3,\end{cases}$ | 24. | $F(x)=\begin{cases}0, & при\, x<0\\ x^2/26, & при\, 0\le x\le 5\\ 1, & при\, x>5.\end{cases}$ |

**Задание**: **Случайная величина задана законом распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины:**

25.

| $x_i$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 |

28.

| $x_i$ | 8 | 12 | 18 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,3 | 0,1 | 0,3 | 0,2 |

26.

| $x_i$ | 14 | 18 | 23 | 28 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

29.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,16 | 0,35 | 0,31 | 0,12 |

27.

| $x_i$ | 18 | 23 | 28 | 30 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |

30.

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,5 |

**Пояснения к работе:**

**Необходимые формулы:**

***Основные понятия и формулы***

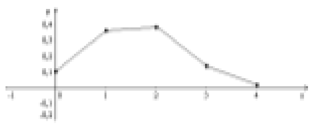
**Форма задания закона распределения**

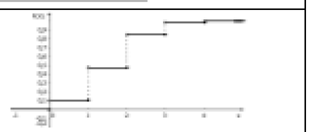
Ряд распределения

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,102167 | 0,363261 | 0,381424 | 0,138700 | 0,014448 |

Многоугольник распределения

Функция распределения (интегральная функция распределения)

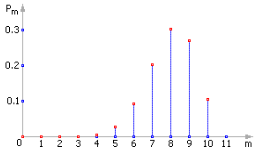
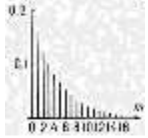
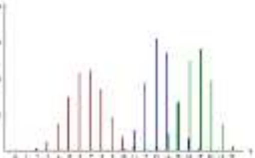
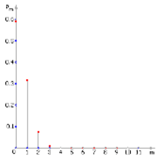




**Основные числовые характеристики и их свойства**

| | |
|---|---|
| Математическое ожидание: $$\mathrm{M(X)} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$ | *M(C) = C*<br>*M(CX) = C·M(X)*<br>$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$<br>$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$ |
| Дисперсия: $$D(X) = \sum p_i\big(x_i - M(X)\big)^2$$ $$D(X) = \sum p_i x_i^2 - (M(X))^2$$ | *D(C) = 0*<br>$D(CX) = C^2 \cdot D(X)$<br>$D(X_1 \pm X_2 \pm \ldots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$ |
| Среднее квадратичное отклонение (среднее квадратическое отклонение) | $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(X)}$ |

**Основные законы распределения**

| Биномиальное | Геометрическое | Гипергеометрическое | Пуассона |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |



**Контрольные вопросы:**

1. Дайте определение дискретной случайной величины.

2. Дайте определение закона распределения случайной величины.
3. Запишите числовые характеристики случайных величин.
4. Дайте определение равномерного распределения непрерывных случайных величин.
5. Дайте определение нормального закона распределения вероятностей.

## Практическая работа №12

**Тема:** Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при n=2), заданной аналитически.

**Цель работы:** Закрепить и систематизировать знания по теме «Основные численные методы».

**Задание: Составить таблицу конечных разностей функций, заданных аналитически, от начального значения $x_0$ до конечного $x_7$, приняв шаг равным $h$:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $y = x^3 - x^2 + 6x - 8,\ x_0 = 0\ \ h = 1$ | 4. | $y = 2x^3 - 8x + 20, \quad x_0 = 0{,}5\ \ h = 0{,}5$ |
| 2. | $y = 5x^3 - 8x + 4, \quad x_0 = 0\ \ h = 2$ | 5. | $y = x^4 - 2x^2 + 1, \quad x_0 = 0 \quad h = 0{,}5$ |
| 3. | $y = x^4 - 2x^2 + 10, \quad x_0 = 0\ \ h = 0{,}2$ | 6. | $y = 0{,}5x^3 + 2x^2 - 3x + 8,\ x_0 = 1\ h = 1$ |

**Задание: Построить таблицу разностей функции $y = f(x)$, заданной таблично:**

7.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *y* | 7,5 | 2 | -3,5 | -6 | -2,5 | 10 | 34,5 |

10.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 1 | 2 | | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *y* | 6 | 16 | 36 | 72 | 130 | 216 | 336 |

8.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *y* | -3,9 | -0,2 | 6,7 | 17,4 | 32,5 | 52,6 | 78,3 |

11.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *y* | -3 | -6 | -3 | 12 | 45 | 102 | 189 |

9.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *y* | -3,9 | -5,2 | -3,3 | 2,4 | 12,5 | 27,6 | 48,3 |

12.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| *y* | 0 | 8 | 30 | 72 | 140 | 240 | 378 |

**Задание: Найти значения первой и второй производных функции, заданной таблично, в точках $x=a+b_n$:**

13. *x=2,4+0,05n*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 3,2 | 3,4 |
| *y(x)* | 3,526 | 3,782 | 3,945 | 4,043 | 4,104 | 4,155 |

*n=1*

14. *x=4,5-0,06n*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 3,6 | 3,8 | 4,0 | 4,2 | 4,4 | 4,6 |
| *y(x)* | 4,222 | 4,331 | 4,507 | 4,775 | 5,159 | 5,683 |

*n=5*

15. *x=1,6+0,08n*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 |
| *y(x)* | 10,517 | 10,193 | 9,807 | 8,387 | 8,977 | 8,637 |

*n=2*

16. *x=2,4+0,05n*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 3,2 | 3,4 |
| *y(x)* | 3,526 | 3,782 | 3,945 | 4,043 | 4,104 | 4,155 |

*n=3*

17. *x=4,5-0,06n*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *x* | 3,6 | 3,8 | 4,0 | 4,2 | 4,4 | 4,6 |
| *y(x)* | 4,222 | 4,331 | 4,507 | 4,775 | 5,159 | 5,683 |

*n=7*

18. *x=1,6+0,08n*

| *x* | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *y(x)* | 10,517 | 10,193 | 9,807 | 8,387 | 8,977 | 8,637 |

*n=4*

**Задание: По табличным данным найти аналитическое выражение первой производной:**

19.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 8 | 6 | 10 | 26 | 60 | 118 | 206 | 330 | 496 |

20.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | -2 | 15 | 58 | 139 | 270 | 463 | 730 | 1083 | 1534 |

21.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | -1,5 | 16 | 70,5 | 180 | 362,5 | 636 | 1018,5 | 1528 | 2182,5 |

22.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 5,5 | 18 | 40,5 | 76 | 127,5 | 198 | 290,5 | 408 | 553,5 |

23.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 7 | 24 | 63 | 136 | 255 | 432 | 679 | 1008 | 1431 |

24.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 0 | 18 | 78 | 204 | 420 | 750 | 1218 | 1848 | 2664 |

**Задание: Вычислить значения первой и второй производной функции в точке $x_0$, методом численного дифференцирования. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой:**

25.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 8 | 6 | 10 | 26 | 60 | 118 | 206 | 330 | 496 |

$x_0$=1,5

26.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | -2 | 15 | 58 | 139 | 270 | 463 | 730 | 1083 | 1534 |

$x_0$=2,5

27.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | -1,5 | 16 | 70,5 | 180 | 362,5 | 636 | 1018,5 | 1528 | 2182,5 |

$x_0$=1,25

28.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 5,5 | 18 | 40,5 | 76 | 127,5 | 198 | 290,5 | 408 | 553,5 |

$x_0$=1,75

29.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 7 | 24 | 63 | 136 | 255 | 432 | 679 | 1008 | 1431 |

$x_0$=2,2

30.

| *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 0 | 18 | 78 | 204 | 420 | 750 | 1218 | 1848 | 2664 |

$x_0$=2,1

**Пояснения к работе:**

**Необходимые формулы:**

**Задача численного дифференцирования** состоит в приближенном вычислении производных функции f(x) по заданным в конечном числе точек значениям этой функции.

Один из универсальных способов построения формул численного дифференцирования состоит в том, что по значениям функции $f(x)$ в некоторых узлах $x_0$ , $x_1$ , ... , $x_N$ строят интерполяционный полином $P_N(x)$ (обычно в форме Лагранжа) и приближенно полагают $f^{(r)}(x) \approx P^{(r)}N(x)$,
$0 \le r \le N$
В ряде случаев наряду с приближенным равенством удается (например, используя формулу Тейлора) получить точное равенство, содержащее остаточный член R (погрешность численного дифференцирования):
$f^{(r)}(x) = P^{(r)}_N(x) + R$, $0 \le r \le N$
Такие формулы называются формулами численного дифференцирования с остаточными членами. Степень, с которой входит величина $h = \max_i h_i$ ($h_i=x_i - x_{i-1}$) в остаточный член, называется порядком погрешности формулы численного дифференцирования. Формулы с отброшенными остаточными членами называются просто формулами численного дифференцирования.
Формулы численного дифференцирования с остаточными членами для первой (r=1) и второй (r=2) производных в узлах, расположенных с постоянным шагом $h_i \equiv h > 0$:
r=1, N=1 (два узла): $f'(x_0) = (f_1 - f_0)/h - hf''(\xi)/2$
$f'(x_1) = (f_1 - f_0)/h + hf''(\xi)/2$

r=1, N=2 (три узла): $f'(x_0) = (-3f_0 + 4f_1 - f_2)/2h + h^2f'''(\xi)/3$
$f'(x_1) = (f_2 - f_0)/2h - h^2f'''(\xi)/6$
$f'(x_2) = (f_0 - 4f_1 + 3f_2)/2h + h^2f'''(\xi)/3$

r=2, N=2 (три узла): $f''(x_0) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h_2 - hf'''(\xi)$
$f''(x_1) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2 - h^2f^{(4)}(\xi)/12$
$f''(x_2) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2 + hf'''(\xi)$

r=2, N=3 (четыре узла): $f''(x_0) = (2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3)/h^2 + 11h^2f^{(4)}(\xi)/12$
$f''(x_1) = (f_0 - 2f_1 + f_2)/h^2 - h^2f^{(4)}(\xi)/12$
$f''(x_2) = (f_0 - 2f_1 + f_3)/h^2 - h^2f^{(4)}(\xi)/12$
$f''(x_3) = (-f_0 + 4f_1 - 5f_2 + 2f_3)/h^2 + 11h^2f^{(4)}(\xi)/12$
В приведенных формулах $\xi$ есть некоторая точка (своя для каждой из формул) из интервала $(x_0 , x_N)$. Остаточные члены этих формул находятся с помощью формулы Тейлора. При этом предполагается, что на отрезке $[x_0 , x_N]$ у функции $f(x)$ непрерывна производная, через которую выражается остаточный член. При четном N в среднем узле для четной производной порядок точности формулы на единицу больше, чем в остальных узлах. Поэтому рекомендуется по возможности использовать формулы численного дифференцирования с узлами, расположенными симметрично относительно той точки, в которой ищется производная.

**Контрольные вопросы:**
1. Запишите основные задачи численного дифференцирования.
2. Запишите формулы вычисления погрешности вычислений.
3. Запишите 1-ый интерполяционный многочлен Ньютона.
4. Запишите 2-ой интерполяционный многочлен Ньютона.
5. Запишите первую и вторую формулы Ньютона в узлах для вычисления производных на краях таблицы.

**Задания на практическую работу для заочной формы обучения.**

**Практическая работа №1**

**Тема: Решение прикладных задач на определение производной**

**Цель работы:** Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Дифференциальное и интегральное исчисление».

**Задание: Решить задачу на физический смысл производной:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени *t* = 9 с. | 4. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с? |
| 2. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 3$ с. | 5. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 3t - 29$ (где *x* —расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени *t* = 3 с. |
| 3. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$ (где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени *t* = 6 с. | 6. | Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t + 13$ (где *x* — расстояние от точки отсчета в метрах, *t* — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени *t* = 3 с. |

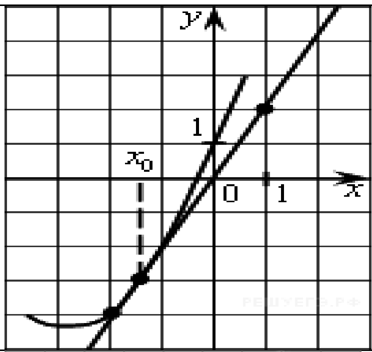
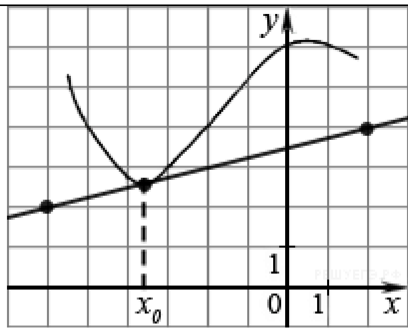
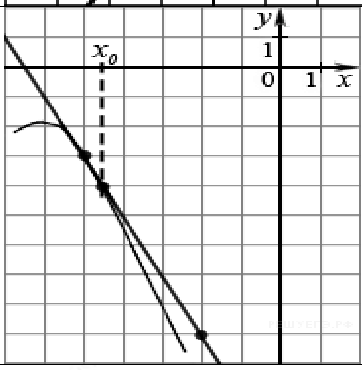
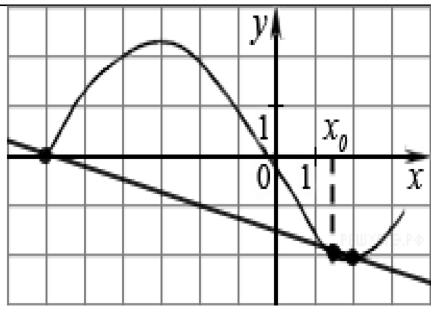
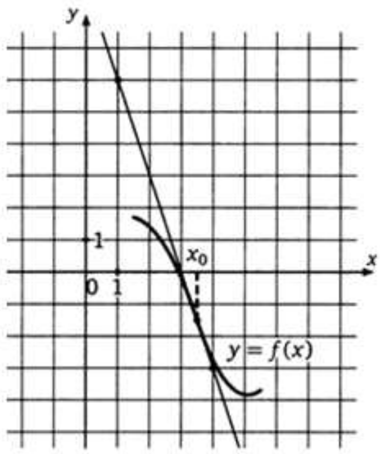
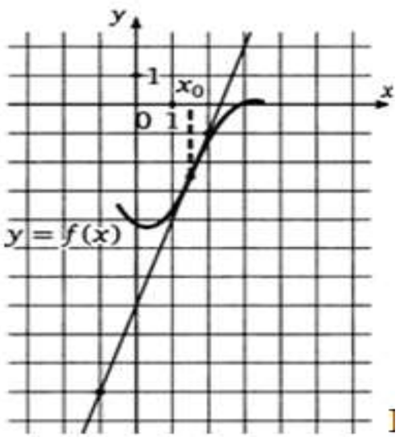
**Задание: Решить задачу на геометрический смысл производной:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания. | 10. | Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $ax^2 + 2x + 3$. Найдите $a$. |
| 8. | Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания. | 11. | Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $28x^2 + bx + 15$. Найдите $b$, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0. |
| 9. | Прямая $y = 5x - 3$ является касательной к графику функции $9x^2 + bx + 13$. Найдите *b*, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0. | 12. | Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $3x^2 - 3x + c$. Найдите $c$. |

**Задание: Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13. | $y = 6x - \frac{2}{x}$ в его точке с абсциссой равной -1. | 16. | $y(x) = 4x^3 - 12x + 5$ в его точке с абсциссой равной 4. |
| 14. | $y = 4 - x^2$ в его точке с абсциссой равной -6. | 17. | $f(x)=(x-6)(x2+6x+36)$ в его точке с абсциссой равной 1. |
| 15. | $y = -\frac{4}{x}$ в его точке с абсциссой равной -2. | 18. | $y = \frac{x^4}{4}$ его точке с абсциссой равной 3. |

**Задание: На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке $x_0$.:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. |   | 22. |   |
| 20. |   | 23. |   |
| 21. |   | 24. |   |

**Задание: Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке:**

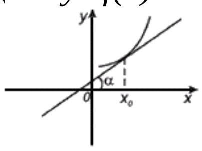
| | | | |
|---|---|---|---|
| 25. | $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2;$ [– 2; 2] | 28. | $f(x) = 9 - 6x^2 - x^3$ [– 4; 2]; |
| 26. | $y = 9x + 3x^2 - x^3;$ [– 2; 2] | 29. | $y = 4 - 9x + 3x^2 + x^3$ [– 2; 2] |
| 27. | $y = 5 + x^4 - 8x$ [– 3 ; 2] | 30. | $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ [– 4; 3] |

**Пояснения к работе:**

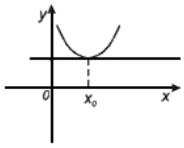
**Необходимые формулы:**

**Геометрический смысл производной:**

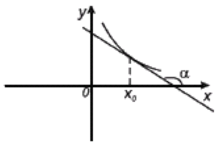
Производная в точке $x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в этой точке.



$f'(x_0) = tg\alpha > 0$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$



$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

**Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке $x_0$** :

$$y = f(x_a) + f'(x_a)(x - x_a)$$

**Физический смысл производной:**

Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки: $v(t) = x'(t)$

**Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции**:

1.Находим ОДЗ функции.

2. Находим производную функции

3. Приравниваем производную к нулю

4. Находим промежутки, на которых производная сохраняет знак, и по ним определяем промежутки возрастания и убывания функции: Если на промежутке производная функции >0, то функция возрастает на этом промежутке. Если на промежутке производная функции <0, то функция убывает на этом промежутке.

5. Находим точки максимума и минимума функции. В точке максимума функции производная меняет знак с "+" на "-". В точке минимума функции производная меняет знак с "-" на "+".

6. Находим значение функции в концах отрезка, затем сравниваем значение функции в концах отрезка и в точках максимума, и выбираем из них наибольшее, если нужно найти наибольшее значение функции или сравниваем значение функции в концах отрезка и в точках минимума, и выбираем из них наименьшее, если нужно найти наименьшее значение функции.

**Контрольные вопросы:**

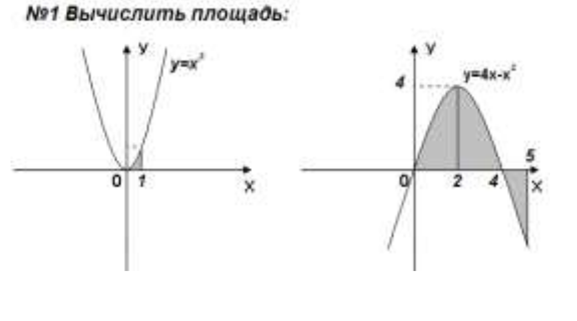
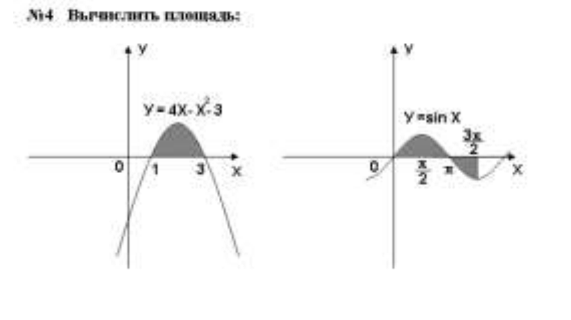
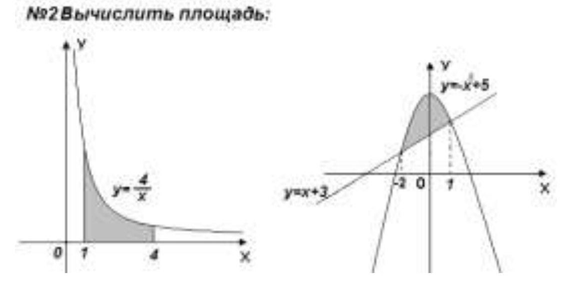
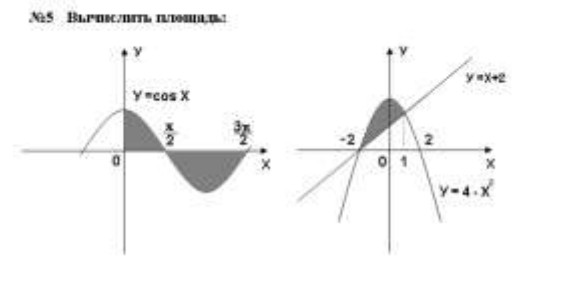
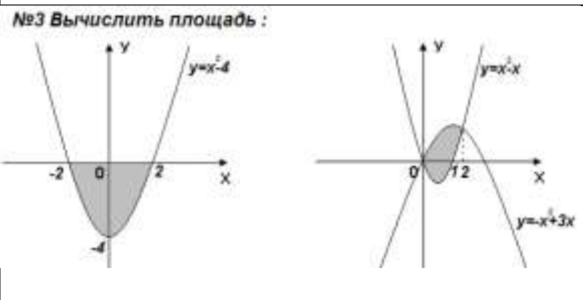
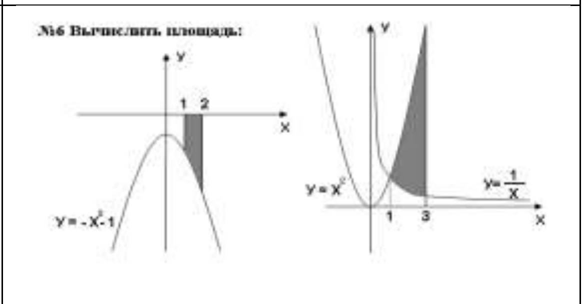
6. Запишите алгоритм исследования графика функции.
7. Дайте определение касательной к графику функции.
8. Сформулируйте алгоритм составления уравнения касательной к графику функции.
9. Запишите алгоритм исследования непрерывной функции на монотонность и экстремумы.
10. Запишите алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке [*а; в*].

**Практическая работа №2**

**Тема:** «Решение задач на вычисление интегралов»

**Цель работы:** Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Дифференциальное и интегральное исчисление».

**Задание: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:**

<table>
<tr><td>1.</td><td>
</td><td>4.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>
</td><td>5.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
</td><td>6.</td><td>
</td></tr>
</table>

**Задание: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | $y = x^3, x = -2, x = 1, y = 0.$ | 10. | $y = x + 3, y = x^2 + 1.$ |
| 8. | $y = 2x - x^2, y = x.$ | 11. | $y = x^2, x = 1, x = 3, y = 0.$ |
| 9. | $x = \sqrt{y}, y = 1, y = 4, x = 0.$ | 12. | $y = \frac{1}{2}x^2, y = 4 - x.$ |

**Задание**: **Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13. | $y = -x^2 + 8x - 16;$<br>$y = x^2 - 4x.$ | 16. | $y = -1{,}5x^2 + 9x - 7{,}5,$<br>$y = -x^2 + 6x - 5$ |
| 14. | $y = x^2,$<br>$y = 2 - x^2$ | 17. | $y = x^2 - 4x + 6,$<br>$y = 4x - x^2.$ |
| 15. | $y = - x^2 + 2x + 3;$<br>$y = x^2 - 6x - 7.$ | 18. | $y = x^2 - 2x + 2;$<br>$y = -x^2 + 4x + 2.$ |

**Задание: Вычислить объем тела:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. | Полученного при вращении вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$, прямыми $x = 3, x$=12 и осью абсцисс. | 22. | Полученного при вращении вокруг оси $Oy$ трапеции, образованной прямыми $y = 3x$, $y = 2$, y=4 и осью ординат. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20. | Образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$и отрезком $0 \leq \mathrm{y} \leq 8$ оси ординат. | 23. | Образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \leq \mathrm{x} \leq \pi$ оси абсцисс. |
| 21. | Полученного при вращении вокруг оси $Ox$ трапеции, образованной прямыми $y = 0{,}5x, x = 4, x$=6 и осью абсцисс. | 24. | Полученного отвращения кривой $y = \frac{x^2}{4}$ вокруг оси $Oy$ в пределах от $\mathrm{y} = 1,$ y=5. |

**Задание: Решить задачу:**

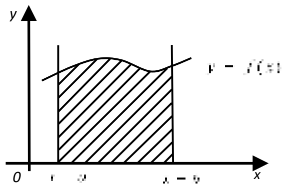
| | | | |
|---|---|---|---|
| 25. | Скорость движения поезда задается формулой $V(t) = 4t^3 - 2t + 1$ км/ч. Найти путь пройденный поездом за первые 4с от начала движения. | 28. | Скорость движения поезда задается формулой $V(t) = 3 + 3t^2$км/ч. Найти путь пройденный поездом за первые 4с от начала движения. |
| 26. | Найти путь, пройденный поездом за 10-ю секунду, зная, что скорость прямолинейного движения выражается формулой $V(t) = t^2 + 4t - 2$км/ч | 29. | Скорость движения поезда задается формулой $V(t) = 3t^2 + t + 1$км/ч. Найти путь пройденный поездом за первые 4с от начала движения. |
| 27. | Найти путь, пройденный поездом за 4-ю секунду, зная, что скорость прямолинейного движения выражается формулой $V(t) = 3t^2 - 2t - 3$км/ч | 30. | Скорость движения изменяется по закону $V(t) = 2t$ км/ч. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения. |

**Пояснения к работе:**

**Необходимые формулы:**

**Вычисление площадей плоских фигур**

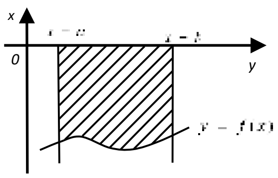
Площадь криволинейной трапеции (рис.1) с основанием на оси ох вычисляется по формуле



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Рис. 1.

Если $f(x) < 0$, т.е. криволинейная трапеция расположена ниже оси ох (рис.2), то её площадь вычисляется по формуле

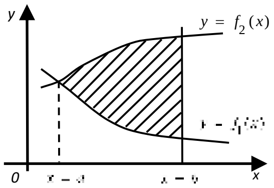


.

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Рис. 2.

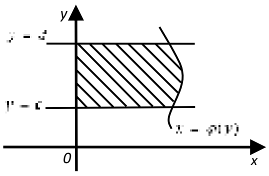
Если для всех $x \in [a;b]$выполняется условие $f_2(x) \geq f_1(x)$, т.е. $f_2(x) - f_1(x) \geq 0$, то площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$ (рис.3), вычисляется по формуле




$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Рис. 3.

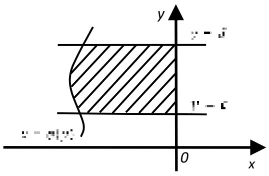
Площадь криволинейной трапеции с основанием на оси оу (рис.4) вычисляется по формуле:



$$S = \int_c^d \varphi(y)dy$$

Рис. 4.

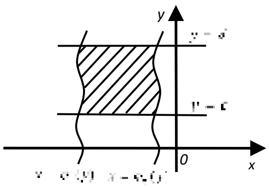
Если $\varphi(y) < 0$, т.е. криволинейная трапеция расположена левее оси оу (рис.5), то её площадь вычисляют по формуле



$$S = -\int_c^d \varphi(y)dy$$

Рис. 5.

Если для всех $y \in [c;d]$ выполняется условие $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y)$, т.е. $\varphi_2(y) - \varphi_1(y) \geq 0$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками непрерывных функций $x = \varphi_2(y)$, $x = \varphi_1(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$, $c < d$ (рис.6), вычисляется по формуле



$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy$$

Рис. 6.

**Вычисление объёмов тел вращения**

Объём тела, образованного вращением вокруг оси ох криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a, x = b$, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx} \cdot$$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси оу криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $x = \varphi(y)$, отрезком оси ординат $c \leq y \leq d$ и прямыми $y = c, y = d$, вычисляется по формуле $\boldsymbol{V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy}$

**Контрольные вопросы:**

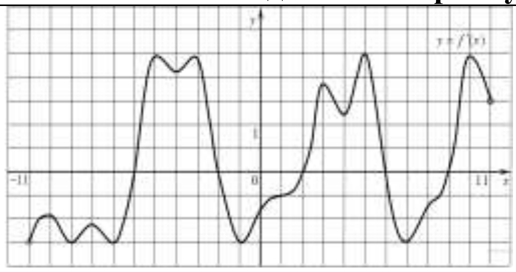
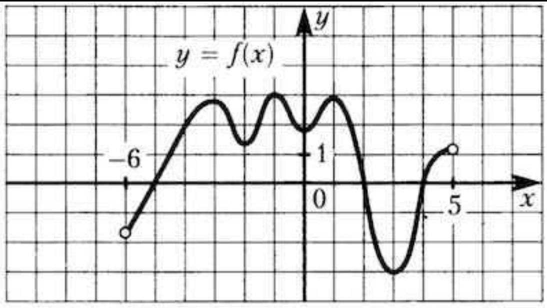
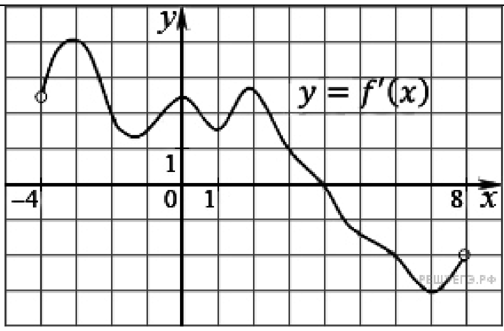
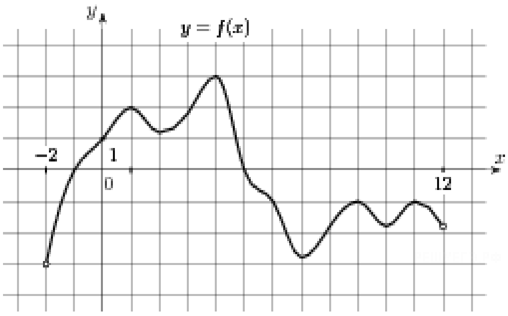
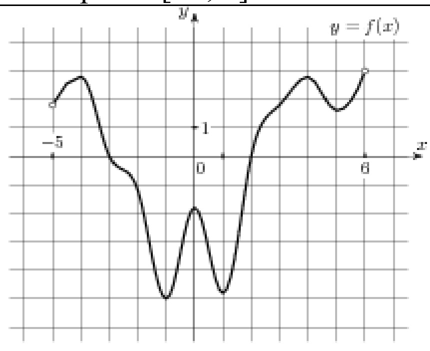
6. Дайте определение неопределенного интеграла.
7. Запишите основные правила интегрирования.
8. Дайте определение определенного интеграла.
9. Запишите основные свойства определенного интеграла.
10. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

**Практическая работа №3**

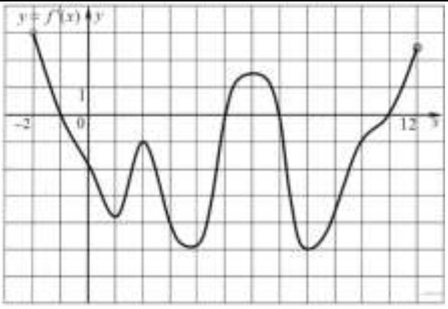
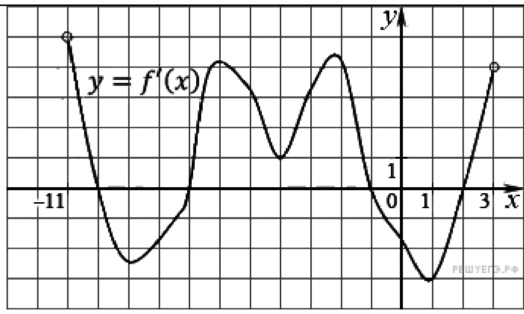
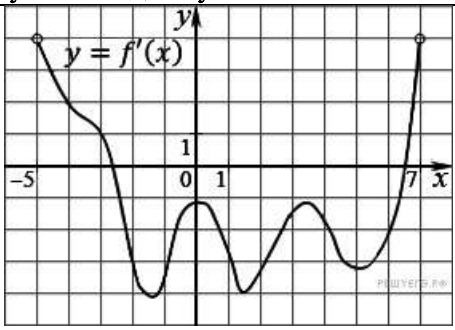
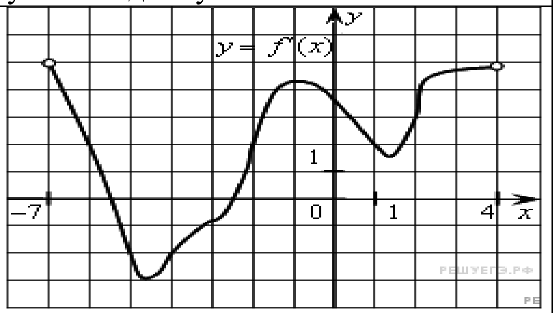
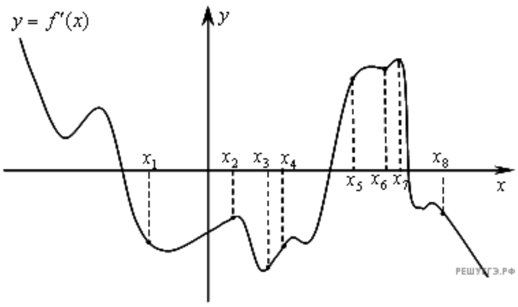
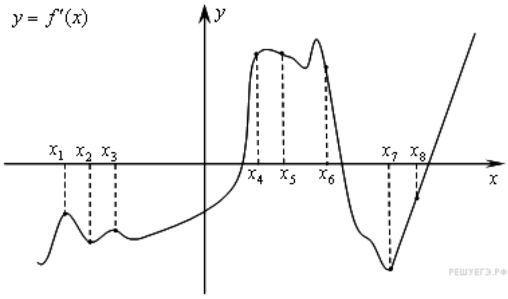
**Тема: « Исследование графиков функций»**

**Цель работы:** Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Дифференциальное и интегральное исчисление».

**Задание: Выполните задание по чертежу:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. |  На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−11; 11). Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке [−10; 10]. | 4. |  На рисунке изображен график функции *y = f (x)* , определенной на интервале (-6; 5). Найдите сумму точек экстремума функции *f (x)*. |
| 2. |  На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−4; 8). Найдите точку экстремума функции *f(x)* на отрезке [−2; 6]. | 5. |  На рисунке изображен график функции *y = f(x)*, определенной на интервале (−2; 12). Найдите сумму точек экстремума функции *f(x)*. |
| 3. |  На рисунке изображен график функции *y = f (x)*, определенной на интервале (-5; 6). Найдите сумму точек экстремума функции *f(x)*. | 6. |  На рисунке изображён график производной функции определенной на интервале (−8; 9). Найдите количество точек минимума *y = f (x)*, функции принадлежащих отрезку [−4; 8]. |

**Задание: Выполните задание по чертежу:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7. | <br>На рисунке изображен график производной функции *f(x),* определенной на интервале (−2; 12). Найдите промежутки убывания функции *f(x).* В ответе укажите длину наибольшего из них. | 10. | <br>На рисунке изображен график производной функции *f(x),* определенной на интервале (−11; 3). Найдите промежутки возрастания функции *f(x).* В ответе укажите длину наибольшего из них. |
| 8. | <br>На рисунке изображен график производной функции *f(x),* определенной на интервале (−5; 7). Найдите промежутки убывания функции *f(x).* В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки. | 11. | <br>На рисунке изображен график производной функции *f(x),* определенной на интервале (−7; 4). Найдите промежутки возрастания функции *f(x).* В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки. |
| 9. | <br>На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В ответе укажите точки, в которых функция убывает. | 12. | <br>На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В ответе укажите точки, в которых функция возрастает. |

**Задание: Найти точки экстремума и определить их характер:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13. | $y=x^3+3x^2+4$ | 16. | $y=-\frac{1}{5}x^5+\frac{49}{3}x^3-\frac{3}{5}$ |
| 14. | $y=\frac{x^2}{1-x}$ | 17. | $y=(x+1)^2(3-x)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15. | $y=x^4-8x^2$ | 18. | $y=-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+18$ |

**Задание: Исследуйте на экстремум функцию:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19. | $y=5-2\sqrt[3]{x^2}$ | 22. | $y=\sqrt[3]{x^2}(10-x)$ |
| 20. | $y=3\sqrt[3]{x^2}-x$ | 23. | $y=e^x+e^{-x}$ |
| 21. | $y=6\sqrt[3]{x^2}(x+1)$ | 24. | $y=x^2e^{-x}$ |

**Задание: Постройте график функции:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 25. | $f(x)=(x+1)^3(x-2)$ | 28. | $f(x)=4x^2\sqrt{1-4x}$ |
| 26. | $f(x)=\frac{x^2+5}{2-x}$ | 29. | $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$ |
| 27. | $f(x)=(x+2)^2(x-2)$ | 30. | $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$ |

**Пояснения к работе:**

**Необходимые формулы:**

**Алгоритм нахождения экстремумов функции и интервалов ее монотонности с помощью первой производной**

1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную функции $f'(x)$.
3. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т.е. точки, принадлежащие области определения функции, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.
4. Исследовать характер изменения функции $f(x)$ и знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $y = f(x)$.
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

   Помни: критическая точка $x_0$ есть точка минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка максимума - в противном случае. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой $x_0$, знак производной не меняется, то в точке $x_0$ функция экстремума не имеет.
6. Вычислить значения функции в точках экстремума.
7. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

**Общая схема исследования функции**

8. Найти область определения функции. Выделить особые точки (точки разрыва).
9. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
10. Найти точки пересечения с осями координат.
11. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций, остальные непериодические, пункт пропускается).
12. Найти точки экстремума и интервалы монотонности (возрастания и убывания) функции.
13. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
14. Построить график функции.

**Контрольные вопросы:**

6. Дайте определение критической точкой функции.
7. Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.
8. Сформулируйте признак максимума (минимума) функции.
9. Дайте определение точки перегиба функции.
10. Запишите определение точек экстремума функции.

## Практическая работа № 4

**Тема:** Комплексные числа и действия над ними.

**Цель работы:**

1. Научиться выполнять действия над комплексными числами, записанные в различных формах.
2. Научиться на практике применять теоретические знания о комплексных числах.

### Краткие сведения из теории

Запись комплексного числа в виде z=a+biназывается алгебраической формой записи комплексного числа. Действительное число a называется действительной частью комплексного числа z=a+bi, а действительное число b – мнимой частью. Модулем комплексного числа z=a+biназывается число $\sqrt{a^2+b^2}$

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Модуль комплексного числа всегда есть действительное неотрицательное число: $|z| \geq 0$, причём $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда z=0.Угол$\varphi$ между действительной осью Ox и вектором $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется аргументом комплексного числа z=0. Если отсчёт ведётся против движения часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по движению часовой стрелки, - положительной. Аргумент $\varphi$ комплексного числа z=a+bi записывается так:$\varphi = \arg z$или $\varphi = \arg(\mathrm{a}+\mathrm{bi})$. *Если* $\varphi = \arg(\mathrm{a}+\mathrm{bi})$*, то имеют место равенства* $cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r}, sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r}, tg\varphi = \frac{b}{a},$

$$\arg z = \varphi + 2\pi k, k\epsilon\mathrm{Z}.$$

Представление комплексного числа в виде $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$, r>0 называется тригонометрической формой записи комплексного числа. Для представления комплексного числа z=a+bi в тригонометрической форме необходимо найти:

1. модуль этого числа;
2. одно из значений аргумента этого числа.

Тригонометрическую форму комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$, можно заменить показательной формой:z $= re^{\varphi i}$.

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$ называется **формулой Эйлера**.

| | **Вариант 1** | **Вариант 2** | **Вариант 3** | **Вариант 4** |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **Выполните действия** | | | |
| | $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$<br>$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$ | $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$<br>$(1+i)^{15}$ | $\frac{1-3i}{-2+i}+\frac{1+4i}{-1+3i}$<br>$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2$ | $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{5-4i}{4+5i}$<br>$(1+i)^{-3}$ |
| 2 | **Найти модуль и главное значение аргумента** | | | |
| | $\frac{8+2i}{5-3i}$ | $\frac{5+i}{2+3i}$ | $\frac{3i-1}{2i+1}$ | $\frac{2-3i}{4+5i}$ |
| 3 | **Возвести в степень** | | | |
| | $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9$ | $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8$ | $(-2-3i)^5$ | $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ |
| 4 | **Извлеките корень** | | | |
| | $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$ | $\sqrt[3]{8}$ | $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$ | $\sqrt[3]{-1}$ |
| 5 | **Представив числа $z_1=-1+i\sqrt{3}$ и $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ в показательной форме, вычислите** | | | |
| | $\sqrt[4]{z_2}$ | $z_1^{-3}$ | $\sqrt[3]{z_1}$ | $z_2^4$ |
| 6 | **Решите уравнение** | | | |
| | $x^4-4x^2+16=0$ | $8x^3-27=0$ | $x^4-2x^2+4=0$ | $27x^3+1=0$ |

| | **Вариант 1** | **Вариант 2** | **Вариант 3** | **Вариант 4** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **Представить в алгебраической форме комплексное число** | | | |
| | $z = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ | $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + isin\ \frac{\pi}{2}\right)$ | $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ | $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + isin\ \frac{\pi}{4}\right)$ |
| 2 | **Представить в алгебраической и тригонометрических формах числа** | | | |
| | $3e^{i\frac{2\pi}{3}}$<br>$\sqrt{2}e^{i\pi}$ | $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$<br>$6e^{1,5i}$ | $2e^{i\frac{\pi}{2}}$<br>$3e^{i2\pi}$ | $5e^{-i\frac{\pi}{2}}$<br>$e^{i\cdot 0}$ |
| 3 | **Представьте в тригонометрической и показательной формах числа** | | | |
| | $2$<br>-5+ $i$ | $-3$<br>-2 - 2 $i$ | 6 $i$<br>- 3 + 4 $i$ | -4 $i$<br>$\sqrt{3} - i$ |
| 4 | **Выполните действия. Результат запишите в показательной, тригонометрической и алгебраической формах** | | | |
| | $2e^{i\frac{7\pi}{18}} \cdot 3e^{i\frac{11\pi}{18}}$ | $e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 4e^{i\frac{\pi}{12}}$ | $6e^{i}\ /\ 3e^{-i}$ | $4e^{i\frac{5\pi}{9}}/\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{9}}$ |

## Литература:

Основные источники:


1. *Богомолов Н.В*. Математика 5-е изд., пер. и доп. Учебник для СПО – М: Издательство Юрайт, 2018
2. *Богомолов Н.В.* Задачи по математике с решениями.: Учеб. пособие для средних проф. учеб. заведений. – М.: Издательство Юрайт, 2018


Дополнительные источники:


1. Сайт: http://school-collection.edu.ru
2. «Математика»: учебно-методическая газета.
3. «Квант». Форма доступа: www.kvant.mirror1.mccme.ru
3. Электронная библиотека. Форма доступа: www.math.ru/lib